PROBLÈMES DE RIGIDITÉ ET SPECTRE MARQUÉ DES LONGUEURS

COLIN GUILLARMOU AND THIBAULT LEFEUVRE

Abstract. Les longueurs des géodésiques périodiques sur les variétés riemanniennes fermées à courbure négative peuvent être ordonnées par leur classe d'homotopie libre, on appelle cet ensemble de longueurs le *spectre marqué* de la variéte riemannienne. Il est conjecturé que le spectre marqué détermine la métrique à isométrie près. Nous discutons de résultats récents sur ce problème, ainsi que sur le problème célèbre d'isospectralité pour le laplacien : *Can one hear the shape of a drum?*

1. Le problème de Kac

Un problème classique de géométrie spectrale est de savoir à quel point le spectre des fréquences propres d'un tambour détermine sa forme. En 1966, Mark Kac publie un article intitulé *Can one hear the shape of a drum?* [Kac] qui a influencé un certain nombre de travaux remarquables. Mathématiquement, la question est la suivante : si M est un domaine à bord lisse de $\mathbb{R}^n$, le spectre (compté avec multiplicité)

$$\mathrm{Sp}(\Delta_M) := \{\lambda \geq 0 \,|\, \ker(\Delta_M - \lambda) \neq 0\}$$

du laplacien $\Delta_M = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ avec condition de Dirichlet détermine t'il le domaine au sens où deux domaines M_1, M_2 ayant le même spectre doivent être l'image l'un de l'autre par une isométrie euclidienne (on dit alors que les domaines sont congruents). Mark Kac mentionne que ce problème lui avait été communiqué par Salomon Bochner dix ans plus tôt, et il écrit : *before I go any further, let me say that as far as I know the problem is still unsolved. Personally, I believe that one cannot "hear" the shape of a tambourine but I may well be wrong and I am not prepared to bet large sums either way.* Il existe un cas relativement simple pour lequel on peut donner un résultat positif, il s'agit du cas où M_1 est un disque du plan et M_2 un domaine de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse. En effet, l'asymptotique de la trace de l'opérateur de chaleur nous donne [Pl, MKSi] quand $t \to 0^+$

$$\sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_M)} e^{-\lambda_j t} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{2\pi t} - \frac{\ell(\partial M)}{4\sqrt{2\pi t}} + o(1/\sqrt{t}),$$

par conséquent, si les deux domaines ont même spectre, ils ont même développement asymptotique et donc leurs volumes et périmètres coïncident. Or l'inégalité isopérimétrique nous assure que $\ell(\partial M)^2 \geq 4\pi \mathrm{Vol}(M)$ avec égalité si et seulement si M est un disque. Ceci montre

Théorème 1. [Kac] *Un disque est spectralement déterminé parmi les domaines euclidiens du plan à bord lisse.*

Récemment, en utilisant les résultats de Avila-De Simoi-Kaloshi et Kaloshin-Sorrentino [ADK, KaSo], Hamid Hezari et Steven Zelditch ont étendu ce résultat :

Théorème 2. [HeZe] *Une ellipse avec excentricité petite est spectralement déterminée parmi les domaines euclidiens à bord lisse du plan.*

Le même problème se pose naturellement pour les géométries non-euclidiennes : on peut se demander si le spectre du laplacien $\Delta_g = d^*d$ sur une variété riemannienne (M, g) détermine la métrique à isométrie près. John Milnor [Mi] donna en 1964 l'exemple de tores plats de dimension 16 qui ne sont pas isométriques mais ont même spectre du laplacien, montrant qu'en général le spectre du laplacien ne détermine pas la classe d'isométrie de la métrique. Pour les variétés à courbure négative, les premiers contre-exemples sont dus à Marie-France Vignéras :

Théorème 3. [Vi] *Il existe des surfaces fermées, à courbure de Gauss -1, qui ne sont pas isométriques mais ont même spectre du laplacien.*

En 1985, Toshikazu Sunada [Su] donne une construction générale, basée sur des revêtements, de variétés non-isométriques mais isospectrales, et obtient de nouveaux exemples en dimension 2 et 4. Les premiers contre-exemples au problème posé par Kac, i.e. de domaines plans isospectraux non congruents, sont donnés un peu plus tard par Carolyn Gordon, David Webb et Scott Wolpert :

Théorème 4. [GWW] *Il existe des domaines du plan, à bord lisse par morceaux, qui ne sont pas isométriques mais ont même spectre du laplacien avec condition de Dirichlet.*

Puisque $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ ne détermine pas en général la métrique riemannienne g, on peut se demander quelle est la structure de l'ensemble des métriques isospectrales à une métrique g_0 donnée. Une première réponse est donnée par Brad Osgood, Ralph Phillips et Peter Sarnak:

Théorème 5. [OPS] *Un ensemble de surfaces riemanniennes isospectrales est séquentiellement compact pour la topologie C^∞ des classes d'isométrie.*

La preuve repose d'une part sur le fait que les invariants de chaleur, i.e. les coefficients du développement de $Z(t) = \sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_g)} e^{-\lambda_j t}$ quand $t \to 0^+$, controlent des invariants géométriques tels que le volume et les dérivées de la courbure de Gauss, et d'autres part le déterminant du laplacien $\det(\Delta_g)$ permet de controler le module (ou classe conforme) de g.

Dans [OPS], les auteurs conjecturent pour les métriques à courbure sectionnelles négatives que le résultat suivant devrait être vrai :

Conjecture 1. [OPS] *L'ensemble des classes d'isométrie de métriques à courbure négative ayant le même spectre du laplacien qu'une métrique g_0 fixée à courbure négative est un ensemble fini.*

Une approche possible, en dimension 2 en utilisant la compacité mentionnée ci-dessus, serait de montrer la conjecture suivante:

Conjecture 2 (Rigidité locale de $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$)**.** *Si (M, g_0) est une variété fermée à courbure négative, il existe un voisinage V de la classe d'isométrie de g_0 pour la topologie C^∞ tel que pour toute métrique g dans V, $\mathrm{Sp}(\Delta_g) = \mathrm{Sp}(\Delta_{g_0})$ si et seulement si g et g_0 sont isométriques.*

Autrement dit, le spectre du laplacien devrait déterminer localement la métrique à isométrie près.

2. Spectre des longueurs

En courbure constante -1, la formule de trace de Selberg (ici sur les surfaces) s'écrit pour chaque $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_g)} h\Big(\sqrt{\lambda_j - 1/4}\Big) = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} h(t) \tanh(\pi t) t dt + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell(\gamma)}{\sinh(k\ell(\gamma)/2)} \hat{h}(k\ell(\gamma))$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des géodésiques périodiques primitives et $\hat{h}$ la transformée de Fourier de h. On voit donc que $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ détermine l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques

$$\mathrm{LS}(g) := \{\ell_g(\gamma) \,|\, \gamma \text{ géodésique périodique de } g\},$$

que l'on appelle *spectre des longueurs* de g. De manière plus générale, pour une variété à courbure négative, Colin de Verdière [CdV], Chazarain [Ch] et Duistermaat-Guillemin [DuGu] ont montré que la fonction[1] $u(t) := \sum_{\lambda_j \in \mathrm{Sp}(\Delta_M)} e^{-i\sqrt{\lambda_j} t}$ est une distribution de la variable $t \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{Singsupp}(u) \subset \{0\} \cup \mathrm{LS}(g).$$

De plus, la singularité de $u(t)$ en $t = T \in \mathrm{LS}(g)$ est donnée par

$$u(t) \sim \frac{1}{t - T} \sum_{(\gamma,k) \in \mathcal{P} \times \mathbb{N}, k\ell(\gamma) = T} \frac{\ell(\gamma)}{2\pi |\det(1 - P_\gamma^k)|^{1/2}}$$

[1] On notera qu'il s'agit d'une somme de termes oscillants, non convergentes comme fonction, mais qui converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

avec P_γ l'application de Poincaré du flot géodésique linéarisé en γ. Ce résultat implique que $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ détermine $\mathrm{LS}(g)$ en courbure négative, du moins si l'on considère $\mathrm{LS}(g)$ sans prendre en compte la multiplicité. Notons que les métriques pour lesquelles la multiplicité des longueurs des géodésiques périodiques est triviale sont génériques parmi les métriques à courbure négative.

Les exemples de Vignéras et Sunada ont aussi les mêmes spectres de longueurs. Cependant, tout comme pour la conjecture 2, il est naturel de postuler la

Conjecture 3 (Rigidité locale de $\mathrm{LS}(g)$)**.** *Si (M, g_0) est une variété fermée à courbure négative, il existe un voisinage V de la classe d'isométrie de g_0 pour la topologie C^∞ tel que pour toute métrique g dans V, $\mathrm{LS}(g) = \mathrm{LS}(g_0)$ (avec multiplicité) si et seulement si g et g_0 sont isométriques.*

3. Spectre marqué des longueurs

Concernant le spectre des longueurs des variétés à courbure négatives, une fois la topologie fixée, on peut ordonner les longueurs des géodésiques fermées par leur classe d'homotopie libre: pour toute classe c d'homotopie libre, il existe une unique géodésique γ_c dans la classe c, qui est obtenue en minimisant la fonctionnelle longueur

$$\gamma \in c \mapsto \ell_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt$$

sur les courbes $\gamma : S^1 \to M$ de classe C^1 dont l'image appartient à c. Ceci nous permet de définir le *spectre marqué des longueurs*.

Définition 3.1. Le spectre marqué des longueurs de (M, g) est l'application

$$L_g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+, \quad L_g(c) = \ell_g(\gamma_c)$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des classes d'homotopie libre de M.

L'avantage de cette application, par rapport à son image $\mathrm{LS}(g) = L_g(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^+$, est qu'elle dépend de façon lisse de g. De plus, deux métriques g_1, g_2 avec même spectre marqué $L_{g_1} = L_{g_2}$ ont leurs flots géodésiques $\varphi_t^{g_1}, \varphi_t^{g_2}$ conjugués [Ha1] au sens où il existe un homéomorphisme hölderien $\psi : S_{g_1}M \to S_{g_2}M$ tel que (ici $S_{g_i}M \subset TM$ est le fibré unitaire tangent pour la métrique g_i)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_t^{g_2} \circ \psi = \psi \circ \varphi_t^{g_1}.$$

Comme le spectre des longueurs $\mathrm{LS}(g)$ ne détermine pas g à isométrie près, une question sans doute plus naturelle et raisonnable a été posée dans un article de Keith Burns et Anatole Katok :

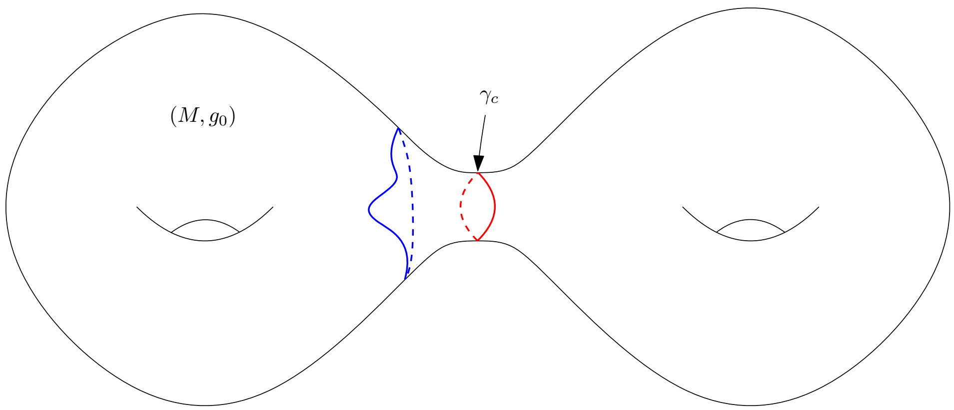

FIGURE 1. Une surface de genre 2. La classe d'homotopie libre c des courbes ne s'enroulant qu'une unique fois autour de la partie centrale contient une unique géodésique périodique γ_c (en rouge).

Conjecture 4. [BuKa] *Soit (M, g_0) une variété fermée à courbure négative. Si g est une autre métrique à courbure négative telle que $L_g = L_{g_0}$, alors g et g_0 sont isométriques.*

Notons que la résolution de cette conjecture n'implique pas de résultats directement sur le problème d'isospectralité posé par Kac car $\mathrm{Sp}(\Delta_g)$ ne détermine pas L_g. Cette conjecture de Burns-Katok est toujours ouverte en dimension $n > 2$, mais elle a été résolue par Jean-Pierre Otal et Christopher Croke pour les surfaces.

Théorème 6. [Ot, Cr1] *Une surface fermée à courbure négative est déterminée, à isométrie près, par son spectre marqué des longueurs.*

Auparavant, Guillemin-Kazhdan [GuKa] avaient montré en dimension 2 qu'il n'y a pas de familles lisses $(g_s)_{s\in\mathbb{R}}$ de métriques à courbure négative ayant le même spectre marqué, hormis les déformations isométriques. Ce résultat "infinitésimal" a été généralisé par Croke-Sharafutdinov [CrSh] en dimension n quelconque. En dimension $n \geq 2$, Anatole Katok [Ka] a aussi prouvé que deux métriques conformes $g' = e^{\omega} g$ à courbure négative ont même spectre marqué si et seulement si $g' = g$. Quant à Ursula Hamenstädt [Ha2], elle a utilisé les résultats de rigidité de Besson-Courtois-Gallot [BCG] pour obtenir le

Théorème 7. [Ha2] *Si (M, g_0) est un espace localement symétrique compact à courbure négative, alors si g est une métrique à courbure négative sur M telle que $L_g = L_{g_0}$, nécessairement g est isométrique à g_0.*

L'an dernier, nous avons montré un résultat de rigidité locale en toute dimension, qui répond "localement" à la conjecture de Burns-Katok.

Théorème 8. [GL, GKL] *Si (M, g_0) est une variété fermée à courbure négative, alors il existe k dépendant de $\dim M$ seulement et $\epsilon > 0$ tel que, pour toute métrique g satisfaisant $\|g - g_0\|_{C^k} < \epsilon$, si $L_g = L_{g_0}$, alors nécessairement g est isométrique à g_0. Plus* *précisemment, il existe $C>0$ tel que pour chaque g vérifiant $\|g-g_0\|_{C^k}<\epsilon$, il existe un difféomorphisme ϕ de M tel que*

$$\|\phi^*g-g_0\|_{H^{-1/2}(M)}\leq C\limsup_{j\to\infty}\Big|\log\frac{L_g(c_j)}{L_{g_0}(c_j)}\Big|^{1/2}.$$

L'espace $H^{-1/2}(M)$ est l'espace de Sobolev d'ordre $-1/2$ dont la norme est construite en utilisant g_0. On peut noter aussi que C,ϵ sont localement uniforme en g_0. Parmi les futures applications possibles de ce résultat, nous envisageons des avancées sur la Conjecture 3, elle même liée à la Conjecture 2. La quantité

$$d_T(g_1,g_2):=\limsup_{j\to\infty}\Big|\log\frac{L_{g_1}(c_j)}{L_{g_2}(c_j)}\Big|$$

est appelée distance de Thurston en théorie de Teichmüller lorsque g_i sont à courbure -1 en dimension 2. Notre résultat montre qu'il s'agit bien d'une distance près de la diagonale sur les classes d'isométrie de métriques à courbure négative. On conjecture que cette distance est issue d'une certaine métrique finslerienne, un résultat qui impliquerait la conjecture de Burns-Katok parmi les composantes connexes de métriques à courbure négative.

References

[ADK] A. Avila, J. De Simoi, V. Kaloshin, *An integrable deformation of an ellipse of small eccentricity is an ellipse*, Ann. of Math. **184** (2016), no. 2, 527–558.

[BCG] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Entropies et rigidité des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geometric And Functional Analysis **5** (1995), 731–799.

[BuKa] K. Burns, A. Katok, *Manifolds with non-positive curvature*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **5** (1985) no 2, 307–317.

[Ch] J. Chazarain, *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes.* Inventiones math. **24** (1974), 65–82.

[CdV] Y. Colin de Verdière, *Spectre du laplacien et longueurs des géoddsiques périodiques II.* Comp. Math. 27 (1973) 159–184.

[Cr1] C. B. Croke, *Rigidity for surfaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), no. 1, 150–169.

[CrSh] C. B. Croke, V. A. Sharafutdinov, *Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold*, Topology **37** (1998), no. 6, pp. 1265–1273.

[DuGu] J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inventiones Math. **29** (1975), 39–79.

[GWW] C. Gordon, D. Webb, S. Wolpert, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Math. **110** (1992) no 1, 1–22.

[GKL] C. Guillarmou, G. Knieper, T. Lefeuvre, *Geodesic stretch, pressure metric and marked length spectrum rigidity*, arXiv:1909.08666.

[GL] C. Guillarmou, T. Lefeuvre, *The marked length spectrum of Anosov manifolds.* Annals of Mathematics **190** (2019), no 1., 321–344.

[GuKa] V. Guillemin, D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology **19** (1980), 301–312.

[Ha1] U. Hamenstädt, *Time preserving conjugacies of geodesic flows*. Ergod. Th. Dynam. Sys. **12** (1992), 67–74.

[Ha2] U. Hamenstädt, *Cocycles, symplectic structures and intersection*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999) 90–140.

[HeZe] H. Hezari, S. Zelditch, *One can hear the shape of ellipses of small eccentricity* arXiv 1907.03882.

[Kac] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum*, American Mathematical Monthly. 73 (1966) no 4, part 2.

[KaSo] V. Kaloshin, A. Sorrentino, *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards*, Annals of Mathematics **188** (2018), no. 1, 315–380.

[Ka] A. Katok, *Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **8** (1988), 139–152.

[Mi] J. Milnor, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **51** (1964) no 4, 542.

[MKSi] H.P. Mc Kean, I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 43–69.

[OPS] B. Osgood, R. Philipps, P. Sarnak, *Compact isospectral sets of Riemann surfaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), 212–234.

[Ot] J-P. Otal, *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, Annals of Mathematics (2) **131** (1990), no. 1, 151–162

[Pl] A. Pleijel, *A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes*, Arkiv för mathematik **2** (1954), no 6, 553–569.

[Su] T. Sunada, *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Annals of Mathematics **121** (1985), 169–186.

[Vi] M-F. Vignéras, *Variétés riemanniennes isospectrales non-isométriques*, Annals of Mathematics, Second Series, **112** (1980), no. 1, 21–32.

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

Email address: `colin.guillarmou@math.u-psud.fr`

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

Email address: `thibault.lefeuvre@u-psud.fr`