LA CONJECTURE DE DAVISON-MEINHARDT, UNE PETITE HISTOIRE DE MOTIFS ILLUSTRÉE

FLORIAN IVORRA AND JULIEN SEBAG

1. Des motifs par morceaux...

C'est en travaillant à la preuve des conjectures de Weil, dans la période 1963-1969, que Grothendieck imagine la notion de motifs. Lorsqu'il développe les outils cohomologiques nécessaires à la résolution de ces conjectures, il est frappé par « *l'abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes* » [23, 2.16, p.44] qu'il a mises en évidence.

Rappelons que, si k est un corps[1] plongé dans $\mathbf{C}$, le foncteur de cohomologie singulière $H^*_{\mathrm{sing}}(\cdot, \mathbf{Q})$ à coefficients rationnels associe classiquement à toute k-variété un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel gradué. Il est bien connu que ce foncteur possède une version à support compact $H^*_{\mathrm{sing,c}}(\cdot, \mathbf{Q})$, qui satisfait les propriétés fonctiorielles suivantes :

(1) Nous avons $H^*_{\mathrm{sing,c}}(X, \mathbf{Q}) \cong H^*_{\mathrm{sing,c}}(Y, \mathbf{Q})$ dès que les k-variétés X, Y sont isomorphes.
(2) Nous avons $H^*_{\mathrm{sing,c}}(\mathsf{Spec}(k), \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$.
(3) Le foncteur $H^*_{\mathrm{sing,c}}(\cdot, \mathbf{Q})$ est additif au sens de la localisation : pour toute k-variété X et tout sous-schéma fermé $Z \subset X$ de complémentaire U, il existe une suite exacte longue

$$\ldots \to H^i_{\mathrm{sing,c}}(U, \mathbf{Q}) \to H^i_{\mathrm{sing,c}}(X, \mathbf{Q}) \to H^i_{\mathrm{sing,c}}(Z, \mathbf{Q}) \to H^{i+1}_{\mathrm{sing,c}}(U, \mathbf{Q}) \to \ldots$$

(4) Le foncteur $H^*_{\mathrm{sing,c}}(\cdot, \mathbf{Q})$ est monoïdal au sens de la formule de Künneth : pour toutes les k-variétés X, Y, le morphisme canonique de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels gradués $H^*_{\mathrm{sing,c}}(Y, \mathbf{Q}) \otimes H^*_{\mathrm{sing,c}}(Y, \mathbf{Q}) \to H^*_{\mathrm{sing,c}}(X \times_k Y, \mathbf{Q})$ est un isomorphisme (dans la catégorie).

Ces propriétés (au corps des coefficients près) sont en fait communes aux cohomologies, notamment ℓ-adiques, introduites par Grothendieck. Et l'idée même de motif se trouve, en un sens, cachée derrière cette observation élémentaire. Une des premières tentatives de Grothendieck pour expliciter ce *motif récurrent* à la source de *toutes* ces « bonnes » théories cohomologiques peut probablement se lire dans sa lettre à Serre du 16 août 1964 [15, p. 172–175]. Il y expose l'embryon de la construction des motifs purs – nous y reviendrons plus bas – mais également ce que l'on appelle aujourd'hui l'*anneau de Grothendieck des variétés (sur k)* :

> Soit k un corps, algébriquement clos pour fixer les idées, et soit $\mathrm{L}(k)$ le « groupe K » défini par les schémas de type fini sur k, avec comme relations celles qui proviennent d'un découpage en morceaux.

Nous pouvons donner à cette citation un sens précis[2] dans le cadre que nous utiliserons ultérieurement. Soit S un schéma. Toute S-variété X définit un élément $\bar{X}$ dans l'ensemble $\underline{Var}_S$ des classes d'isomorphisme de S-variétés. L'*anneau de Grothendieck (relatif) des S-variétés*, noté traditionnellement $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$, est

2020 *Mathematics Subject Classification.* 14B20, 14C15, 14F42, 14G22, 32S30.
Key words and phrases. Nearby motivic sheaves, motivic zeta functions.

[1] Pour la simplicité de cette présentation, nous ferons l'hypothèse générale que le corps k est de caractéristique zéro, bien que cette hypothèse puisse être affaiblie dans certains énoncés.

[2] Dans la terminologie actuelle, « groupe K » s'entend comme « *groupe de Grothendieck* ».

l'anneau universel pour les propriétés cohomologiques rappelées *supra*. Précisément, si A est un anneau et $h\colon \underline{Var_S} \to A$ une application telle que

- $h(\bar{S}) = 1$,
- $h(\overline{X \times_S X}) = h(\bar{X})h(\bar{X}')$ pour toutes les S-variétés X, X',
- $h(\bar{X}) = h(\bar{Z}) + h(\bar{U})$ pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$ de complémentaire Z (dans X),

il existe un unique morphisme d'anneaux $\bar{h}\colon \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S) \to A$ tel que $\bar{h}([X]) = h(\bar{X})$ pour toute S-variété X, si nous notons $[X]$ l'image de X dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$. La construction de cet objet suit la description qu'en fait Grothendieck. Si $\mathbf{Z}[\underline{Var_S}]$ est le groupe abélien libre associé à $\underline{Var_S}$, on définit $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$ comme son quotient par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $[X] - [U] - [Z]$ pour tout sous-ensemble ouvert $U \subset X$ de complémentaire Z (dans X). La structure d'anneau commutatif est induite par le produit fibré au-dessus de S ; son unité est en particulier la classe $[S]$ de S. Notons que la prise du crochet $[\cdot]$ ne dépend définitionnellement que de la structure réduite des schémas considérés, ce qui reste compatible avec le calcul cohomologique pour les cohomologies classiques. Dans la suite de sa lettre, Grothendieck écrit encore :

> J'appelle « motif » sur k quelque chose comme un groupe de cohomologie ℓ-adique d'un schéma algébrique sur k, mais considéré comme indépendant de ℓ, et avec sa structure « entière », ou disons pour l'instant « sur $\mathbf{Q}$ », déduite de la théorie des cycles algébriques. La triste vérité, c'est que pour le moment je ne sais définir la catégorie abélienne des motifs, bien que je commence à avoir un yoga assez précis sur cette catégorie, disons $\mathbf{M}(k)$.

La lecture de ces lignes rappellent deux vérités : la première sur l'essence des motifs, comme élément consubstantiel à toutes les théories cohomologiques classiques, et sa connexion inhérente aux cycles algébriques ; la seconde sur l'absence (au moins en 1964) d'une description de *la* catégorie des motifs, rassemblant l'ensemble des propriétés attendues, autrement dit : le « yoga » complet, et même l'absence de toute approximation raisonnable d'une telle catégorie (sur cet aspect des choses, nous ne sommes plus aujourd'hui au même stade d'avancement qu'en 1964).

Si $H^*_c(\cdot)$ est une « bonne » cohomologie (à support compact et à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$), les propriétés rappelées pour la cohomologie singulière et le caractère universel de $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)$ induisent, *via* la caratéristique d'Euler naturellement associée, l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\chi_{H^*_c}\colon \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k) \to \mathbf{Q}$$

qui est un exemple important de mesure motivique. La connexion entre l'anneau de Grothendieck des variétés et toutes les théories cohomologiques existe donc de manière tangible. À ce titre, la pratique a d'ailleurs décrit les éléments de l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$ comme des « motifs virtuels » ; la virtualité traduit le fait que les élements de l'anneau $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$ ne représentent, en général, les cohomologies que par le biais de leurs caractéristiques d'Euler. Les développements des dernières décennies nous suggèrent toutefois de préférer l'usage de « motifs par morceaux »; cette terminologie rendant directement compte, finalement, de l'opération de découpage qui est au cœur de la définition de $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$.

La dernière partie de la lettre de Grothendieck complète la relation entre motifs et motifs par morceaux :

> Soit $M(k)$ le « groupe K » défini par les motifs sur k. [...] Ceci dit, prenant des sommes alternées de cohomologies à support compact, on trouve un homomorphisme naturel $L(k) \to M(k)$ qui est d'ailleurs un morphisme d'anneaux (pour le produit cartésien à gauche, le produit tensoriel à droite). La question générale qui se pose est alors de savoir ce qu'on peut dire de cet homomorphisme, est-il très loin d'être bijectif ? Note que les deux membres de cet homomorphisme sont munis de filtrations naturelles, via la dimension des préschémas et l'homomorphisme est compatible avec ces filtrations. [...] Je me hasarde à aucune conjecture générale sur l'homomorphisme plus haut, j'espère seulement par des considérations heuristiques de ce genre finir par arriver à une construction effective de la catégorie des motifs, ce qui me semble un point essentiel de mon « long-run program ».

L'existence du morphisme que propose Grothendieck – nous l'appellerons *caractéristique d'Euler motivique*[3]– souligne, à nouveau, le caractère motivique de l'anneau de Grothendieck des variétés. Rappelons simplement[4] que la catégorie $\mathbf{M}_{\mathrm{rat}}(k)$ est construite à partir des variétés projectives lisses sur k et des groupes de cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle. Grothendieck s'interroge donc sur l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k) \to \mathrm{K}_0(\mathbf{M}_{\mathrm{rat}}(k))^5$$

envoyant la classe d'une k-variété projective lisse sur la classe de son motif rationnel (le K_0 au but renvoie à la notion de groupe de Grothendieck des catégories additives, c'est-à-dire à des relations de découpage fournies par les décompositions en somme directe). Ainsi, deux variétés complexes projectives et lisses dont les classes dans $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_{\mathbf{C}})$ coïncident vont, *via* la caractéristique d'Euler motivique, produire la même classe dans le groupe de Grothendieck des motifs rationnels. Nous pouvons utiliser cette observation pour souligner les connexions et différences entre motifs par morceaux et motifs purs. Si les motifs rationnels de deux variétés projectives et lisses sont de dimension finie[6], alors l'égalité de leur classe $\mathrm{K}_0(\mathbf{M}_{\mathrm{rat}}(k))$ implique que leurs motifs rationnels sont égaux (voir [28].) Pour la classe des variétés projectives et lisses, conjecturalement, l'anneau de Grothendieck des variétés encode bien l'information motivique. Toutefois, le découpage nécessaire pour passer des variétés projectives et lisses au cadre des variétés arbitraire brise tout espoir d'obtenir un résultat général. Drinfeld souligne ce constat en qualifiant $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$ d'anneau des « motifs du pauvre » (voir [33]). Dans l'autre sens, notons que la caractéristique d'Euler motivique n'est pas injective (voir [35], ou [38] qui permet de construire des éléments non nuls du noyau) et qu'une partie importante de la géométrie est perdue sous son action. Dans [28], par exemple, nous avons proposé un exemple de surface projective lisse, de type général, dont la classe dans l'anneau de Grothendieck des motifs rationnels $\mathbf{M}_{\mathrm{rat}}(\mathbf{C})$ coïncide avec la classe de l'éclatement de 8 points dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

2. ...À la théorie homotopique stable des schémas

Le développement de la théorie des motifs depuis la vision initiale de Grothendieck a procédé par approximations successives, chaque itération étant un peu plus proche du « yoga » imaginé par Grothendieck.

---

[3] L'image de la classe $\mathbf{L}_k$ de la droite affine sur k est, par découpage, la classe du motif de *Lefschetz* $\mathbb{1}(-1)$, de sorte que la caractéristique d'Euler motivique se factorise par la localisation de l'anneau de Gorthendieck par rapport à $\mathbf{L}_k$, que l'on note $\mathscr{M}_k \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_k)[\mathbf{L}_k^{-1}]$.

[4] Nous renvoyons la personne intéressée à [1] pour les détails de la construction et ses propriétés.

[5] L'existence est finalement justifiée dans [22, 25]. Avec les travaux de Bittner [13] qui proposent une description alternative de l'anneau de Grothendieck des variétés en termes de générateurs-relations, il est aisé de justifier l'existence de cette caractéristique d'Euler motivique.

[6] La conjecture de Kimura-O'Sullivan prédit que le motif rationnel d'une variété projective lisse est de dimension finie [32, 2].

Présenter ce développement et ses nombreux protagonistes nécessiterait à nouveau un texte à part entière. Nous nous permettrons donc ici un saut dans le temps et les mathématiques pour aborder directement la version la plus aboutie et la plus récente de la théorie des motifs : la *théorie homotopique stable des schémas*. Cette dernière a été initiée par Morel et Voevodsky et a joué un rôle crucial dans la preuve par Voevodsky des conjectures de Milnor et Bloch-Kato [45, 46]. Nous renvoyons par exemple à [47] pour un exposé des fondements de cette théorie.

Pour le topologue, elle constitue le pendant, en géométrie algébrique, de la topologie algébrique classique et plus précisément de la théorie homotopique stable des espaces topologiques dont elle emprunte le langage (catégorie de modèles, ensembles simpliciaux, spectres...) et les méthodes. Pour le géomètre algébriste, elle représente une contribution majeure à plus d'un titre vers la réalisation du rêve de Grothendieck. Notons que c'est également dans ce cadre qu'Ayoub a développé une théorie fonctorielle et motivique des cycles proches. Si S est une k-variété algébrique, la construction de Morel-Voevodsky produit une catégorie triangulée $\mathbf{SH}(S)$ dans laquelle on peut associer des motifs de natures différentes à toute S-variété (voir *infra*).

La richesse de la théorie homotopique stable des schémas réside notamment dans sa nature catégorique au travers de l'information contenue dans ses morphismes. Illustrons cela avec la cohomologie motivique et les groupes de Chow d'une k-variété lisse X. La cohomologie motivique $H^{p,q}(X)$ (voir par exemple [43, 36]) est représentable dans $\mathbf{SH}(k)$ par un objet, le spectre d'Eilenberg-Mac Lane motivique $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}$, on a donc un isomorphisme

$$H^{p,q}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}(k)}(\mathrm{M}(X), \mathbf{H}_{\mathbf{Z}}(q)[p])$$

qui permet de calculer la cohomologie motivique de X à partir de son motif $\mathrm{M}(X)$. Le lien avec les groupes de Chow est alors fourni par un théorème de Voevodsky [43, 44] qui montre que le groupe de cohomologie motivique $H^{2p-q,p}(X)$ est isomorphe au groupe de Chow supérieur de Bloch $\mathrm{CH}^p(X,q)$. Lorsque $q=0$ on retrouve le groupe de Chow $\mathrm{CH}^p(X)$. Les groupes de Chow de X sont donc déterminés par le motif de X. Ce dernier détermine également les groupes de K-théorie de X (la K-théorie invariante par homotopie étant représentable par le spectre $\mathbf{KGL}$) ou les groupes de cobordisme de X (le cobordisme algébrique de Morel-Voevodsky étant représentable par le spectre $\mathbf{MGL}$).

Le formalisme des six opérations, construit par Ayoub dans [3, 4], est l'un des apports considérables de la théorie homotopique stable des schémas, par rapport aux approximations antérieures. Pour Grothendieck [23, p. 193, p. 237], ce formalisme est « *indissolublement lié* » à la théorie des motifs qui en constitue « *la ligne d'horizon idéale* ». Plus précisément, pour tout morphisme de k-variétés $f : X \to Y$, Ayoub construit des adjonctions (voir [3, Scholie 1.4.2])

$$\begin{tikzcd} \mathbf{SH}(X) \arrow[r, shift right, "f_*"'] & \mathbf{SH}(Y) \arrow[l, shift right, "f^*"'] \arrow[r, shift left, "f_!"] & \mathbf{SH}(X). \arrow[l, shift left, "f^!"] \end{tikzcd}$$

vérifiant les relations attendues entre ces foncteurs (par exemple les théorèmes de changement de base propre et lisse), un produit tensoriel $\otimes$, un Hom interne $\underline{\mathsf{Hom}}$ ainsi qu'un foncteur de dualité vérifiant les propriétés familières en théorie ℓ-adique. Ayoub introduit également une notion de motif constructible qui coincident avec la notion d'object compact de $\mathbf{SH}(X)$ et montrent que les sous-catégories pleines $\mathbf{SH}_{\mathrm{ct}}(X)$ des motifs constructibles sont stables par les différents foncteurs.

Si $p : X \to S$ est un morphisme de k-variétés, on peut associer à p notamment trois motifs : le motif cohomologique $\mathrm{M}^{\vee}_S(X) = p_*\mathbb{1}_X$, le motif à support compact $\mathrm{M}_{S,c}(X) := p_!\mathbb{1}_X$ et le motif homologique $\mathrm{M}_S(X) = p_!p^!\mathbb{1}_S$.

Le lien avec l'anneau de Grothendieck des variétés est donné par le motif à support compact qui fournit directement la caractéristique d'Euler motivique voulue par Grothendieck

$$\begin{aligned} \chi_c : \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S) &\to \mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathrm{ct}}(S)) \\ [p : X \to S] &\mapsto [p_! \mathbb{1}_X] = [\mathrm{M}_{S,c}(X)] \end{aligned}$$

qui se prolonge au localisé $\mathscr{M}_S := \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)[\mathbf{L}^{-1}]$ (le K_0 au but doit être pris au sens des catégories triangulées, de sorte que les relations de découpage sont fournies par les triangles distingués, la structure d'anneau étant induite par le produit tensoriel).

Dans le cas où le corps k est plongé dans $\mathbf{C}$, on dispose d'un foncteur de réalisation

$$\mathbf{SH}_{\mathrm{ct}}(X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbf{Q})$$

à valeurs dans la catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X, \mathbf{Q})$ des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels (pour la topologie transcendante) sur $X(\mathbf{C})$ à cohomologie (algébriquement) constructibles (voir [5]). En outre ces foncteurs sont compatibles avec les six opérations de Grothendieck. Pour ℓ un nombre premier, on dispose également de foncteurs de réalisation ℓ-adique compatibles aux six opérations [6].

⋆

L'analyse rétrospective de la théorie des motifs fait donc apparaître l'anneau de Grothendieck des S-variétés comme une sorte d'approximation au premier ordre de cette théorie. La souplesse que créent les relations de découpage dans les manipulations, leur adéquation avec les opérations de comptage (numérique ou géométrique), la nature profondément géométrique de l'objet, l'existence d'un grand nombre mesures motiviques (notamment à saveur cohomologique) font des anneaux de Grothendieck un outil très efficace dans l'élaboration de résultats nouveaux, virtuellement motiviques, comme l'ont justifié, par exemple, les premiers développements de l'intégration motivique. Mais les limites de $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$, du point de vue de l'idée même des motifs, sont toutefois apparentes : à cause de ces relations de découpage, les énoncés produits s'interprètent en termes de caractéristique d'Euler quand les motifs sont destinés à fournir des isomorphismes sur les objets de cohomologie eux-mêmes ; par ailleurs, la construction n'a préservé qu'une trace très élémentaire des concepts catégoriques usuels de fonctorialité. La catégorie homotopique stable des schémas laisse envisager la possibilité de remplacer utilement l'usage de $\mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)$ dans la recherche de réponses véritablement motiviques aux problèmes de nature géométrique formulables dans les anneaux de Grothendieck des variétés, mais qui y resteraient, simplement, virtuellement motiviques. Le résultat principal de [31] (voir le théorème 5.2 et sa généralisation théorème 7.1) illustre ce principe général que nous avons appliqué dans le cadre des cycles proches.

3. Les cycles proches motiviques par morceaux, une histoire d'intégration motivique

En 1995, dans son désormais célèbre « Lecture at Orsay », Kontsevich a construit une théorie de la mesure géométrique dont l'impact dans différentes directions des mathématiques s'est révélé conséquent. L'objectif initial de la construction était de généraliser un résultat, prouvé par Batyrev, à l'aide de l'intégration p-adique et des conjectures de Weil, portant sur l'invariance birationnelle des nombres de Betti pour les variétés algébriques de Calabi-Yau. Attardons-nous un instant sur le théorème de Kontsevich afin d'éclairer la présentation de notre travail. À l'aide du formalisme qu'il introduit, Kontsevich prouve que deux k-variétés propres, lisses et K-équivalentes ont les mêmes nombres de Hodge. Deux ingrédients, dont nous ferons usage, constituent les pierres angulaires de la théorie : le *schéma des arcs* tracés sur une k-variété et l'*anneau de Grothendieck* des k-variétés ; la théorie est, quant à elle, façonnée suivant le modèle de la théorie d'Igusa des intégrales p-adiques [27] et de la théorie d'intégration relativement aux caractéristiques d'Euler introduite par Viro [42].

Le *schéma des arcs* tracés sur une k-variété X est le k-schéma $\mathscr{L}_\infty(X)$ qui paramètre les solutions, à valeurs dans les anneaux de séries formelles en une variable, des équations locales définissant X. L'on peut définir le k-schémas $\mathscr{L}_\infty(X)$ à partir des schéma des jets de niveau n, grâce à la formule $\mathscr{L}_\infty(X) \cong \varprojlim_n \mathscr{L}_n(X)$, et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, le schéma des n-jets par la bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(\mathsf{Spec}(A), \mathscr{L}_n(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(\mathsf{Spec}(A[t]/\langle t^{n+1}\rangle), X)$$

fonctorielle en la k-algèbre A.

L'*intégration motivique* est une théorie de la mesure dont les ensembles mesurables se construisent à partir des sous-ensembles constructibles de $\mathscr{L}_\infty(X)$ et qui prend ses valeurs dans une complétion dimensionnelle de l'anneau $\mathscr{M}_S := \mathrm{K}_0(\mathbf{Var}_S)[\mathbf{L}_S^{-1}]$ construit par localisation de l'anneau de Grothendieck des S-variétés par rapport à la classe $\mathbf{L}_S$ de la doite affine sur le schéma S. La classe des fonctions intégrables ainsi que l'intégrale associée se définissent par analogie avec la théorie p-adique et les fonctions zêta d'Igusa. Les détails peuvent se trouver, par exemple, dans les ouvrages [27, 14].

À la suite de l'exposé de Kontsevich, Denef et Loeser ont utilisé les similitudes, que l'intégration motivique entretient avec l'intégration p-adique, pour géométriser certains travaux d'Igusa en produisant une incarnation géométrique des intégrales p-adiques (et fonctions zêta d'Igusa), c'est-à-dire pour produire une sorte de « motif » de ces intégrales p-adiques, qui possède la propriété de s'y spécialiser pour presque tout p[7]. Dans leurs travaux publiés entre la fin des années 90 et le milieu des années 2000, Denef et Loeser ont notamment stabilisé le formalisme de cette version géométrique de l'intégration motivique [20], imaginée en 1995 par Kontsevich, et la notion de *fonction zêta motivique*. C'est à partir cette classe de séries formelles que l'on construit les cycles proches motiviques par morceaux comme nous allons l'expliquer maintenant.

Soit X une k-variété et $f\colon X \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme de k-schémas. Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous introduisons le sous-ensemble constructible fermé $Z_n \subset \mathscr{L}_n(X)$ suivant

$$Z_n := \{\varphi \in \mathscr{L}_n(X),\ f(\varphi(t)) \equiv t^n \pmod{t^{n+1}}\}.$$

Pour cela, nous identifions la donnée du morphime f à celle d'une fonction régulière sur X et la donnée d'un point du schéma des n-jets $\mathscr{L}_n(X)$ à celle d'un paramétrage formel des équations (locales) de X approché à l'ordre t^{n+1}.

Definition 3.1. *Soit X une k-variété de dimension d. Soit $f\colon X \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme de k-variété. Nous notons X_0 la fibre de f au-dessus de 0. On appelle fonction zêta de Denef-Loeser*[8] *la série génératrice*

$$Z_f(T) \underset{\text{déf}}{=} \sum_{n\geq 1} [Z_n]\mathbf{L}_{X_0}^{-d(n+1)} T^n \in \mathscr{M}_{X_0}[[T]].$$

Comme son homologue p-adique, la série formelle $Z_f(T)$ est rationnelle, c'est-à-dire peut s'exprimer comme le quotient de deux polynômes (à coefficients dans $\mathscr{M}_{X_0}$ ici). Ce résultat, obtenu par Denef et Loeser dès la fin des années 2000, utilise la résolution des singularités pour permettre de ramener les calculs des coefficients

[7]Notons la similitude de pensée avec celle qu'emprunte Grothendieck dans sa poursuite de la catégorie des motifs.

[8]Nous préférons introduire cette appellation pour les fonctions zêta introduites par Denef et Loeser pour éviter toute confusion dans l'usage du terme « motivique ».

de cette série sur un modèle lisse de X dans lequel la fibre spéciale de f est à croisements normaux stricts. L'idée est en effet d'utiliser la théorie de l'intégration motivique et son changement de variables, après avoir identifié les coefficients $[Z_n]$ à des intégrales dans la théorie. Cet énoncé, sous sa forme précise, peut se voir comme un analogue du résultat obtenu, à la fin des années 80, par Denef pour les fonctions zêta d'Igusa [18, 19] dont la rationalité avait été prouvée par Igusa.

Une observation, plus inattendue peut-être, au cœur de notre présentation repose sur le fait que la limite formelle de $Z_f(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$ définit un élément de l'anneau $\mathscr{M}_{X_0}$ en vertu de la propriété de rationalité. Elle est précisément égale à :

$$-\sum_{\emptyset\neq J\subseteq I}(1-\mathbf{L})^{|J|-1}[\widetilde{E_J^\circ}][9]. \tag{3.1}$$

L'opposé de cette limite, noté ψ_f, est appelé *motif par morceaux des cycles proches* de (X,f). Une explication de ce choix terminologique est fourni par Denef et Loeser dans [21]. Nous expliquerons comment les faisceaux motiviques proches dans la catégorie homotopique stable des schémas motivique rendent, en particulier, ce choix terminologique complètement pertinent.

L'opérateur de monodromie joue un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie des fibrations et de leur dégénérescence. Pour conclure cette section, signalons que, pour tenir compte de l'action de la monodromie, ont été introduites des versions « équivariantes » des anneaux de Grothendieck des variétés, notamment l'anneau $\mathscr{M}_{X_0}^{\hat\mu}$. Ainsi, il est possible d'étendre les constructions et résultats évoqués précédemment à ce cadre équivariant, et l'on peut vérifier alors que les cycles proches par morceaux vérifient $\psi_f\in\mathscr{M}_{X_0}^{\hat\mu}$. Nous renvoyons à [24] pour les détails des constructions et des arguments.

4. Les faisceaux motiviques proches, une question de revêtement universel motivique

Dans [4], Ayoub étend le formalisme fonctoriel des cycles proches de Grothendieck au cadre de la théorie homotopique stable des schémas. Pour comprendre en quoi la définition d'Ayoub est proche, au moins dans l'esprit, de la définition d'origine de Grothendieck, il est important de rappeler que, dans le cas transcendant, le foncteur des cycles proches associé à une fonction f est obtenu, *via* les six opérations, à partir du revêtement universel du plan complexe épointé. La construction d'Ayoub s'inspire du travail de Rapoport et Zink [39] pour définir un diagramme $\mathscr{R}$ de variétés au dessus de $\mathbf{G}_m$ qui joue le rôle du revêtement universel de la théorie analytique complexe. La définition des cycles proches en théorie homotopique s'en déduit grâce aux formalismes des six opérations. Comme dans la théorie transcendante ou ℓ-adique, le foncteur des cycles proches motiviques ainsi obtenu :

$$\Psi_f:\mathbf{SH}(X_\eta)\to\mathbf{SH}(X_0)$$

est compatible aux images réciproques par des morphismes lisses, aux images directes par des morphismes propres et préserve la constructibilité [4]. De plus, lorsque k est plongé dans $\mathbf{C}$, Ayoub a montré dans [5] la compatibilité *via* le foncteur de réalisation de Betti avec la théorie analytique.

Nous avons vu comment l'action de la monodromie sur les cycles proches est prise (partiellement) en compte dans le groupe de Grothendieck par l'ajout d'une action

---

[9] Dans cette formule, on adopte la convention usuelle des log-résolutions : pour tout sous-ensemble $J\subseteq I$ non vide, nous notons E_J l'intersection des E_i pour $i\in J$; nous posons

$$E_J^\circ=E_J\setminus\cup_{i\notin J}E_i.$$

La variété $\widetilde{E_J^\circ}$ se définit alors comme un certain revêtement étale de E_J° obtenu à partir des multiplicités des composantes dans E_J.

de μ_n. Dans la théorie homotopique stable des schémas, il faut considérer une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{SH}(\mathbf{G}_m)$: la catégorie $\mathbf{QUSH}(k)$ des motifs quasi-unipotents introduite par Ayoub dans [9] lors de son étude de la catégorie homotopique stable des variétés analytiques rigides sur le corps valué $k(\!(t)\!)$ (nous reviendrons sur ce point dans la prochaine section).

Le diagramme $\mathscr{R}$ produit un motif quasi-unipotent $\mathscr{U}$ dont l'image inverse $1^*\mathscr{U}$ par la section unité de $\mathbf{G}_m$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf dans $\mathbf{SH}(k)$. Cette structure est fournie par le formalisme tannakien faible développé par Ayoub dans [7, 8] qui montre également que le foncteur $1^* : \mathbf{QUSH}(k) \to \mathbf{SH}(k)$ se factorise canoniquement par la catégorie des $1^*\mathscr{U}$-comodules. Le lien entre l'algèbre de Hopf $1^*\mathscr{U}$ et la monodromie est alors donné par un théorème d'Ayoub [8] qui assure que la réalisation de Betti de $1^*\mathscr{U}$ est concentrée en degré 0 et que son spectre est isomorphe au produit $\hat{\mu} \times \mathbf{G}_a$. On voit sur ce résultat que la catégorie des motifs quasi-unipotents retient non seulement l'information fournit par la partie semi-simple de la monodromie mais également l'information (fondamentale) liée à la partie nilpotente.

Si $f : X \to \mathbf{A}^1$ est un morphisme de k-variétés algébriques, on peut considérer le morphisme

$$f^{\mathbf{G}_m} : \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_X[t, v, v^{-1}]/(fv - t)) \to \mathsf{Spec}(k[t]).$$

Nous définissons dans [30] le foncteur des cycles proches monodromique Ψ_f^{mon} : $\mathbf{SH}(X_\eta) \to \mathbf{SH}(X_0 \times \mathbf{G}_m)$ en posant $\Psi_f^{\mathrm{mon}}(A) := \Psi_{f^{\mathbf{G}_m}}(A|_{X_\eta \times \mathbf{G}_m})$ pour $A \in \mathbf{SH}(X_\eta)$. Nous montrons alors dans [30] que $\Psi_f^{\mathrm{mon}}(A)$ est quasi-unipotent sur X_0 et que le morphisme canonique

$$1^*\Psi_f^{\mathrm{mon}}(A) \to \Psi_f(A)$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}(X_0)$. Ce résultat peut-être vu comme l'incarnation en théorie homotopique stable des schémas du théorème de quasi-unipotence de la monodromie.

La comparaison entre l'approche par morceaux et l'approche motivique se trouve réalisée dans nos travaux [29, 10]. Plus précisément, nous y montrons l'égalité

$$\chi_c(\psi_f) = [\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})] \tag{4.1}$$

dans l'anneau $\mathrm{K}_0(\mathbf{SH}_{\mathrm{ct}}(X_0))$. La preuve de ce résultat de comparaison s'appuie sur une technique très utile pour étudier le faisceau motivique proche $\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})$: le calcul par restriction aux composantes irréductibles établi dans [10]. Cette technique généralise des résultats partiels obtenu par Ayoub dans [4] et utilise certaines idées introduites dans [29]. Cette technique concerne le cas où la fibre spéciale X_0 est un diviseur à croisements normaux strict dans X de composantes irréductibles $(E_i)_{i\in I}$. On peut toujours s'y ramener en prenant une log-résolution de la fibre spéciale et en utilisant la compatibilité du foncteur faisceau motivique proche avec les morphismes propres. En notant $v_J : E_J^\circ \hookrightarrow E_J$ l'immersion ouverte, comme nous le montrons dans la collaboration avec Ayoub [10], le morphisme canonique

$$\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})|_{E_J} \to v_{J,*}v_J^*\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})|_{E_J}$$

est alors un isomorphisme dans $\mathbf{SH}(E_J)$. Ce résultat permet de calculer $\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})$ en utilisant la propriété de Mayer-Vietoris pour le recouvrement (fermé) formé par les composantes irréductibles de la fibre spéciale après log-resolution. Ce calcul est mené dans [29], l'égalité (4.1) s'en déduit directement.

Nous avons amélioré la comparaison (4.1) pour tenir compte de la monodromie dans [30]. Plus précisément, nous relevons la caractéristique d'Euler motivique à support compact en un morphisme d'anneaux

$$\chi_c^{\mathrm{mon}} : \mathscr{M}_S^{\hat{\mu}} \to \mathrm{K}_0(\mathbf{QUSH}_{\mathrm{ct}}(S))$$

vérifiant $1^*\chi_c^{\mathrm{mon}} = \chi_c$ et nous montrons l'égalité

$$\chi_c^{\mathrm{mon}}(\psi_f) = [\Psi_f^{\mathrm{mon}}(\mathbb{1}_{X_\eta})] \tag{4.2}$$

dans l'anneau $\mathrm{K}_0(\mathbf{QUSH}_{\mathrm{ct}}(X_0))$. Soulignons ici qu'un des avantages de la théorie homotopique stable des schémas est de conserver toute la monodromie et qu'elle ne se limite pas uniquement à l'information liée aux valeurs propres.

5. La conjecture de Davison–Meinhardt

Après ce rapide tour d'horizon, nous allons maintenant nous concentrer sur l'objet central de cette note. Le point de départ et la motivation de notre travail [31] est la question du calcul des cycles proches « par morceaux » pour des fonctions $\mathbf{G}_m$-équivariantes satisfaisant certaines conditions apparaîssant dans le travail de Behrend-Bryan-Szendrői [12] puis dans les travaux de Davison-Meinhardt [16, 17] et plus précisément la conjecture suivante :

Conjecture 5.1 (Davison-Meinhardt [17])**.** *Soit X un espace affine de la forme $Y \times_k \mathbf{A}^r$ où Y est une k-variété lisse et soit $f : X \to \mathbf{A}^1$ une fonction $\mathbf{G}_m$-équivariante pour l'action de poids $n \in \mathbf{N}^\times$ sur $\mathbf{A}^1$ et l'action de $\mathbf{G}_m$ sur X qui est triviale sur Y et de poids $w_1, \dots, w_r > 0$ sur $\mathbf{A}^r$. Alors*

$$\psi_f = [X_1] \tag{5.1}$$

dans $\mathscr{M}_k$.

Cette question est apparue à l'origine dans le contexte de la théorie des invariants de Donaldson-Thomas, eux-mêmes introduits par Thomas dans [41] pour « compter » les faisceaux cohérents stables sur des variétés de Calabi-Yau complexes de dimension 3. Dans [11] Behrend a montré que les invariants de Donaldson-Thomas pouvaient être calculés comme une intégrale par rapport à la caractéristique d'Euler d'une fonction constructible, la *fonction de Behrend*. Cela amène l'intégration motivique et le groupe de Grothendieck des variétés à jouer un rôle dans la recherche de raffinements motiviques des invariants de Donaldson-Thomas. En particulier, le lien entre la fonction de Behrend et les cycles proches, a conduit à l'utilisation des cycles proches « par morceaux » dans la théorie de Donaldson-Thomas. En retour, les questions liées à la théorie de Donaldson-Thomas ont été la source d'un certain nombre de questions/conjectures portant sur le calcul des cycles proches « par morceaux » dans différents contextes. Outre la conjecture 5.1, citons notamment l'identité intégrale conjecturée par Kontsevich-Soibelman dans [34].

La conjecture 5.1 a été démontrée par Nicaise-Payne dans [37] comme application de leur théorème de Fubini motivique pour l'application de tropicalisation. Leur travail utilise les travaux de Hrushovski-Kazhdan sur les volumes motiviques des ensembles semi-algébriques. Auparavant l'égalité (5.1) a été montrée par Behrend-Bryan-Szendrői dans [12] lorsque tous les poids sont égaux à 1, et leur résultat a été généralisé par Davison-Meinhardt dans [16] pour prendre en compte le cas où l'action de $\mathbf{G}_m$ sur le but est de poids $n \in \mathbf{N}^\times$ quelconque. Tant dans [12] que dans [16], les preuves utilisent la formule (3.1) exprimant les cycles proches par morceaux sur une log-résolution de la fibre spéciale. Ces différentes preuves [12, 16, 37] utilisent toutes des formules ou des techniques de calcul de volumes provenant de l'intégration motivique.

Dans [31] nous évitons le recours à l'intégration motivique et aux calculs de volumes motiviques pour développer une approche entièrement fondée sur l'utilisation de la théorie homotopique stable des schémas et du foncteur des cycles proches introduit par Ayoub dans ce contexte. Cette approche, justifiée par les égalités (4.1) et (4.2), a l'avantage de donner un énoncé catégorique sous la forme d'un isomorphisme de motifs et de s'affranchir d'hypothèses géométriques inutilement restrictives.

Pour tout morphisme de k-variétés $f : X \to \mathbf{A}^1$, la fonctorialité des cycles proches fournit des morphismes canoniques

$$\Psi_{\mathrm{Id}}(f_{\eta,*}\mathbb{1}_{X_\eta}) \to f_{\sigma,*}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}) \tag{5.2}$$

$$f_{\sigma,!}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}) \to \Psi_{\mathrm{Id}}(f_{\eta,!}\mathbb{1}_{X_\eta}). \tag{5.3}$$

Supposons maintenant que X soit muni d'une action du monoïde mutiplicatif $\mathbf{A}^1$ et que $f : X \to \mathbf{A}^1$ soit $\mathbf{A}^1$-equivariant de poids $n \in \mathbf{N}^\times$. On supposera en outre que X est lisse sur k. Sous ces hypothèses, qui généralisent celles de la conjecture 5.1, en notant X_1 la fibre au dessus de 1, on peut remarquer que la source du morphisme (5.2) est canoniquement isomorphe au motif $\mathrm{M}(X_1)$ et le but du morphisme (5.3) est canoniquement isomorphe au motif $\mathrm{M}_c(X_1)$. Pour voir cela, on peut se ramener au cas $n = 1$. La fibre générique X_η est alors isomorphe au produit $X_1 \times \mathbf{G}_m$ via l'action de $\mathbf{G}_m$ et l'identification voulue résulte du théorème de changement lisse pour (5.2) et du théorème de changement de base propre pour (5.3). Cette observation, alliée à l'égalité (4.1), montre que le problème catégorique caché derrière la conjecture 5.1 est en fait celui de montrer que le morphisme canonique (5.3) est un isomorphisme sous les hypothèses que nous venons d'énoncer. Notons qu'il n'y a maintenant pas de raison de privilégier le morphisme (5.3) au morphisme (5.2). Notre version motivique de la conjecture de Davidson-Meinhardt dans [31] prend alors la forme du théorème suivant.

Théorème 5.2. *Soit X une k-variété lisse munie d'une action du monoïde $\mathbf{A}^1$. Soit $f : X \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme $\mathbf{A}^1$-équivariant de poids $n \in \mathbf{N}^\times$. Alors les morphismes canoniques*

$$\Psi_{\mathrm{Id}}(f_{\eta,*}\mathbb{1}_{X_\eta}) \to f_{\sigma,*}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta})$$

$$f_{\sigma,!}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_\eta}) \to \Psi_{\mathrm{Id}}(f_{\eta,!}\mathbb{1}_{X_\eta}).$$

sont des isomorphismes dans la catégorie $\mathbf{SH}(k)$.

Notons que notre preuve nous amène, de manière nécessaire à son bon fonctionnement, à généraliser l'énoncé précédent de manière relativement substantiel. Nous reviendrons sur cette forme plus générale dans le dernier paragraphe.

Lorsque f est lisse, le théorème 5.2, montre en parculier que la fibre spéciale X_0 et la fibre en 1 ont des motifs isomorphes. Elles ont donc en particulier même groupes de Chow, même groupes de K-théorie ou de cobordisme algébrique. En prenant la réalisation de Hodge ont retrouve également que les groupes de cohomologie (structures de Hodge incluses) de X_0 et X_1 sont isomorphes. Ce résultat est démontré par Hausel, Letellier et Rodriguez-Villegas dans [26] sous l'hypothèse que le lieu des points fixes est propre. Ces conséquences ne se déduisent pas des énoncés « par morceaux ».

6. Un ingrédient essentiel de la preuve : la géométrie analytique rigide et ses motifs

Avant de donner une idée générale de la preuve du théorème 5.2 et des techniques qu'elle emploie, il nous faut présenter les résultats de [10, 30] qui y jouent un rôle mais dont la portée nous semble dépasser l'application qui en faite dans [31]. Il est en particulier nécessaire de dire quelques mots sur la théorie des motifs en géométrie rigide. Dans la suite on note $R = k[[t]]$ l'anneau des séries formelles et $K = k((t))$ son corps des fractions.

Dans [9], Ayoub a construit, sur le modèle de la théorie algébrique, la catégorie homotopique stable $\mathbf{RigSH}(K)$ des K-variétés analytiques rigides. L'un des résultats centraux de son travail est la relation qu'il met en évidence entre la catégorie des motifs quasi-unipotents sur k et la théorie homotopique stable des K-variétés analytiques rigides : il y montre que la composée des foncteurs

$$\mathfrak{F} : \mathbf{QUSH}(k) \hookrightarrow \mathbf{SH}(\mathbf{G}_m) \xrightarrow{t^*} \mathbf{SH}(K) \xrightarrow{\mathrm{Rig}^*} \mathbf{RigSH}(K)$$

est une équivalence de catégories. On fixe maintenant un quasi-inverse $\mathfrak{R}$.

Rappelons qu'à un K-schéma séparé de type fini Y, on peut associer une variété analytique rigide Y^{an} et que cette construction se traduit au niveau des catégories homotopiques stables par une adjonction

$$\mathrm{Rig}^* : \mathbf{SH}(K) \leftrightarrows \mathbf{RigSH}(K) : \mathrm{Rig}_*$$

provenant d'une adjonction de Quillen au niveau des catégories de spectres correspondantes. Si Y est un K-schéma lisse de type fini, alors par construction $\mathrm{Rig}^*(\mathrm{M}(Y)) = \mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(Y^{\mathrm{an}})$.

Par ailleurs si $\mathscr{X}$ est un R-schéma formel séparé topologiquement de type fini, sa fibre générique $\mathscr{X}_\eta$ (au sens de Raynaud) est une variété analytique rigide quasi-compacte. En géométrie rigide, il existe donc deux façons différentes de produire des variétés analytiques rigides à partir d'un R-schéma séparé de type fini X. On peut soit considérer l'analytifié X_K^{an} soit compléter t-adiquement X pour obtenir un schéma formel $\mathscr{X}$ dont on prend ensuite la fibre générique $\mathscr{X}_\eta$. On a une immersion ouverte canonique

$$\mathscr{X}_\eta \hookrightarrow X_K^{\mathrm{an}}$$

qui est un isomorphisme lorsque X est propre sur R.

Dans [9] Ayoub introduit également des foncteurs cycles proches dans le cas où la droite affine $\mathbf{A}_k^1 := \mathsf{Spec}(k[t])$ est remplacée par le spectre de l'anneau des séries formelles $R = k[[t]]$. Cette situation se ramène à la précédente en considérant le morphisme $\mathsf{Spec}(R) \to \mathbf{A}_k^1$. Ainsi si $f : X \to \mathsf{Spec}(R)$ est un morphisme de type fini, de fibre générique X_K, on dispose d'un foncteur cycles proches

$$\Psi_f : \mathbf{SH}(X_K) \to \mathbf{SH}(X_0).$$

À nouveau ces foncteurs sont compatibles aux images réciproques par des morphismes lisses, aux images directes par des morphismes propres et préservent la constructibilité [4, 6]. Ils sont de plus compatibles avec les foncteurs cycles proches de la théorie ℓ-adique via le foncteur de réalisation de [6].

Remarque 6.1. Lorsque $f : X \to \mathbf{A}^1$ est un morphisme séparé de type fini, la considération du morphisme $f_R : X_R \to \mathsf{Spec}(R)$ obtenu par changement de base redonne le même motif proche. On peut se ramener à la situation arithmétique pour étudier le morphisme (5.2).

Lorsque X_K est lisse sur K et Z est un sous-schéma localement fermé de la fibre spéciale X_0 de tube $]Z[$ dans $\mathscr{X}_\eta$, le résultat principal de [10] est la construction d'un isomorphisme

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(]Z[), \mathrm{Rig}^*(M))) \simeq f_{\sigma,*} z_* z^* \Psi_f(M|_{X_\eta})$$

pour tout objet M de $\mathbf{SH}(K)$. En particulier, ce résultat montre que le but du morphisme

$$\Psi_{\mathrm{Id}}(f_{K,*}\mathbb{1}_K) \to f_{\sigma,*}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_K}) \tag{6.1}$$

a une interprétation en terme de géométrie rigide puisqu'il est isomorphe au motif $1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(\mathscr{X}_\eta), \mathbb{1}))$.

Dans [31], en appliquant les techniques développées dans [9, 10] nous montrons que le morphisme (6.1) lui même possède une interprétation en termes de géométrie rigide : il est donné (à isomorphismes près) par le morphisme canonique

$$1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(X_K^{\mathrm{an}}), \mathbb{1})) \to 1^* \circ \mathfrak{R}(\underline{\mathsf{Hom}}(\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(\mathscr{X}_\eta), \mathbb{1})).$$

On obtient donc la proposition suivante.

Proposition 6.2 ([31]). *Si le morphisme* $\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(\mathscr{X}_\eta) \to \mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(X_K^{\mathrm{an}})$ *est un isomorphisme, alors le morphisme*

$$\Psi_{\mathrm{Id}}(f_{K,*}\mathbb{1}_{X_K}) \to f_{\sigma *}\Psi_f(\mathbb{1}_{X_K})$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}(k)$.

Cette proposition (conjuguée à la remarque 6.1) donne un critère pour que le morphisme (5.2) soit un isomorphisme : il suffit que l'immersion ouverte de $\mathscr{X}_\eta$ dans X_K^{an} induise un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{RigSH}(K)$. On retrouve ainsi d'une manière différente le fait que (5.2) soit un isomorphisme lorsque f est propre. En effet dans ce cas $\mathscr{X}_\eta$ est égal à $X_{\mathrm{K}}^{\mathrm{an}}$.

7. La mise en œuvre

Nous concluons en énonçant la généralisation du théorème 5.2 qui constitue le résultat principal de [31] et en présentant succinctement la structure de sa preuve. Si $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur une k-variété S, on rappelle que l'espace de Thom associé à $\mathscr{E}$ est le motif $\mathrm{Th}(\mathscr{E}) := p_\sharp s_* \mathbb{1}_S \in \mathbf{SH}(S)$. Notre résultat général est le suivant.

Théorème 7.1. *Soit X une k-variété algébrique munie d'une action du monoïde mutiplicatif $\mathbf{A}^1$ et $f : X \to \mathbf{A}^1$ un morphisme $\mathbf{A}^1$-equivariant de poids $n \in \mathbf{N}^\times$. On suppose que X_η est lisse sur k. Alors pour tout objet $A \in \mathbf{SH}(\eta)$ et tout fibré vectoriel $\mathbf{G}_m$-equivariant $\mathscr{M}$ sur X_η, le morphisme canonique*

$$\Psi_{\mathrm{Id}}(f_{\eta,*}(\mathrm{Th}(\mathscr{M}) \otimes A|_{X_\eta})) \to f_{\sigma,*}\Psi_f(\mathrm{Th}(\mathscr{M}) \otimes A|_{X_\eta})$$

est un isomorphisme dans $\mathbf{SH}(k)$.

En particulier, sous les hypothèses de ce théorème, on obtient que les morphismes (5.2) et (5.3) sont des isomorphismes. Pour le premier c'est évident, pour le second il faut prendre $\mathscr{M} = \Omega_{X_\eta/k}$ et utiliser la compatibilité des cycles proches aux foncteurs de dualité prouvée dans [4].

La preuve du théorème 7.1 se fait par réduction à un cas particulier que nous traitons en passant par la géométrie rigide. Si Y est une k-variété lisse, $g \in \mathcal{O}(Y)^\times$ est une fonction inversible sur Y, et $n \geqslant 1$ est un entier, Ayoub a montré dans [9] que le morphisme canonique de motifs rigides $\mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(\mathscr{Q}_\eta) \to \mathrm{M}_{\mathrm{rig}}(Q_K^{\mathrm{an}})$ est un isomorphisme dans le cas du $\mathbf{A}^1$-schéma

$$Q = \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_Y[t,v]/(v^n - gt)) \to \mathsf{Spec}(k[t]).$$

La proposition 6.2 montre donc que (5.2) est, dans ce cas, un isomorphisme. Tout consiste maintenant à ramener le cas général à ce cas particulier. Les ingrédients principaux de cette réduction sont le calcul des cycles proches par réduction aux branches [10] et le théorème de quasi-unipotence de la monodromie sous la forme prouvée dans [30] que nous avons déjà évoquée.

Elle utilise aussi la résolution des singularités et l'on fixe une log-résolution $h : X' \to X$ de la fibre spéciale X_0 dans la suite. Il est à noté que la preuve utilise la résolution des singularités pour

- se ramener au cas où le fibré $\mathscr{M}$ est trivial (on utilise pour cela le théorème de platification par éclatements de Raynaud-Gruson [40] qui permet dans un premier temps de se ramener au cas où le fibré $\mathscr{M}$ est défini sur X tout entier puis au cas où le fibré $\mathscr{M}$ est trivial) ;

- se ramener à une situation « semi-stable » dans laquelle il est possible d'utiliser le calcul des cycles proches par réduction aux composantes irréductibles pour finalement se ramener au cas particulier précédent.

Pour simplifier nous supposerons que le fibré $\mathscr{M}$ est trivial et que $A = \mathbb{1}$.

En utilisant la généralité considérée et les propriétés du foncteur des cycles proches, on peut se ramener à démontrer uniquement le théorème pour les morphismes équivariants de poids $n = 1$. Cependant quitte à modifier l'action de $\mathbf{A}^1$ sur la source, tout morphisme équivariant de poids 1 peut-être vu comme un morphisme équvariant de poids n pour un n que l'on peut choisir à notre convenance. Le choix de l'entier n va être effectué en utilisant le théorème de quasi-unipotence de la monodromie sous la forme donnée dans [30]. En effet si S est une k-variété et A est un motif quasi-unipotent (constructible) sur S, on peut trouver un entier $n \geqslant 1$ tel que l'on ait l'annulation

$$\pi_* j_! e_n^* A = 0 \tag{7.1}$$

où $\pi : \mathbf{A}^1 \times S \to S$ est le morphisme de projection, $j : S \times \mathbf{G}_m \hookrightarrow S \times \mathbf{A}^1$ l'immersion ouverte et $e_n : S \times \mathbf{G}_m \to S \times \mathbf{G}_m$ est le morphisme d'élévation à la puissance n. On choisit l'entier n en prenant $A = \Psi^{\mathrm{mon}}_{f'}(\mathbb{1}_{X'_\eta})$ avec $f' = f \circ h$.

On va alors considérer les morphismes

$$f_n : \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_X[t,v]/(fv^n - t) \to \mathsf{Spec}(k[t])$$

et

$$f'_n : \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_{X'}[t,v]/(f'v^n - t) \to \mathsf{Spec}(k[t]).$$

En utilisant l'action on peut se ramener à montrer le théorème pour le morphisme f_n puis en utilisant la compatibilité des cycles proches aux images directes par un morphisme propre se ramener au cas du morphisme f'_n. Notons que ce morphisme est proche du cas particulier : la différence fondamental est que f' n'est pas inversible dans $\mathcal{O}(X')$! On utilise alors le calcul des cycles proches par réduction aux composantes irréductibles pour se ramener, ce qui utilise l'annulation (7.1), au cas où f' est inversible dans $\mathcal{O}(X')$ et donc au cas particulier.

References

1. Yves André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004. MR 2115000
2. ———, *Motifs de dimension finie (d'après S.-I. Kimura, P. O'Sullivan. . .)*, no. 299, 2005, Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, pp. Exp. No. 929, viii, 115–145. MR 2167204
3. Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I*, Astérisque (2007), no. 314, x+466 pp. (2008).
4. ———, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, Astérisque (2007), no. 315, vi+364 pp. (2008).
5. ———, *Note sur les opérations de Grothendieck et la réalisation de Betti*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), no. 2, 225–263.
6. ———, *La réalisation étale et les opérations de Grothendieck*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (2014), no. 1, 1–145.
7. ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 1–149.
8. ———, *L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, II*, J. Reine Angew. Math. **693** (2014), 151–226.
9. ———, *Motifs des variétés analytiques rigides*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2015), no. 140-141, vi+386.
10. Joseph Ayoub, Florian Ivorra, and Julien Sebag, *Motives of rigid analytic tubes and nearby motivic sheaves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) (2017), 1335–1382.
11. Kai Behrend, *Donaldson-Thomas type invariants via microlocal geometry*, Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 3, 1307–1338. MR 2600874

12. Kai Behrend, Jim Bryan, and Balázs Szendrői, *Motivic degree zero Donaldson-Thomas invariants*, Invent. Math. **192** (2013), no. 1, 111–160. MR 3032328
13. Franziska Bittner, *The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero*, Compos. Math. **140** (2004), no. 4, 1011–1032. MR 2059227
14. Antoine Chambert-Loir, Johannes Nicaise, and Julien Sebag, *Motivic integration*, Progress in Mathematics, vol. 325, Birkhäuser/Springer, New York, 2018. MR 3838446
15. Pierre Colmez and Jean-Pierre Serre (eds.), *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 2, Société Mathématique de France, Paris, 2001.
16. Ben Davison and Sven Meinhardt, *Motivic Donaldson-Thomas invariants for the one-loop quiver with potential*, Geom. Topol. **19** (2015), no. 5, 2535–2555.
17. ______, *The motivic Donaldson-Thomas invariants of* (-2)*-curves*, Algebra Number Theory **11** (2017), no. 6, 1243–1286.
18. J. Denef, *On the degree of Igusa's local zeta function*, Amer. J. Math. **109** (1987), no. 6, 991–1008. MR 919001
19. ______, *Local zeta functions and Euler characteristics*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 3, 713–721. MR 1121152
20. Jan Denef and François Loeser, *Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), no. 1, 201–232. MR 1664700
21. Jan Denef and François Loeser, *Geometry on arc spaces of algebraic varieties*, European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 327–348.
22. H. Gillet and C. Soulé, *Descent, motives and* K*-theory*, J. Reine Angew. Math. **478** (1996), 127–176. MR 1409056
23. A. Grothendieck, *Récoltes et semailles.*
24. Gil Guibert, François Loeser, and Michel Merle, *Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink*, Duke Math. J. **132** (2006), no. 3, 409–457.
25. Francisco Guillén and Vicente Navarro Aznar, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2002), no. 95, 1–91. MR 1953190
26. Tamás Hausel, Emmanuel Letellier, and Fernando Rodriguez-Villegas, *Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties*, Duke Math. J. **160** (2011), no. 2, 323–400.
27. Jun-ichi Igusa, *An introduction to the theory of local zeta functions*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Cambridge, MA, 2000. MR 1743467
28. Florian Ivorra and Julien Sebag, *Géométrie algébrique par morceaux,* K*-équivalence et motifs*, Enseign. Math. (2) **58** (2012), no. 3-4, 375–403.
29. ______, *Nearby motives and motivic nearby cycles*, Selecta Math. (N.S.) **19** (2013), no. 4, 879–902.
30. ______, *Quasi-unipotent motives and motivic nearby sheaves*, Asian J. Math. **25** (2021), no. 1, 089–116.
31. ______, *Nearby motivic sheaves of weighted equivariant functions*, Invent. Math. **Online** (2022).
32. Shun-Ichi Kimura, *Chow groups are finite dimensional, in some sense*, Math. Ann. **331** (2005), no. 1, 173–201. MR 2107443
33. Maxim Kontsevich, *Notes on motives in finite characteristic*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, Progr. Math., vol. 270, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009, pp. 213–247. MR 2641191
34. Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-thomas invariants and cluster transformations*, preprint, arXiv:0811.2435v1 [math.AG], 2008.
35. C. Mazza and C. Weibel, *Schur-finiteness in* λ*-rings*, J. Algebra **374** (2013), 66–78. MR 2998795
36. Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006. MR 2242284
37. Johannes Nicaise and Sam Payne, *A tropical motivic Fubini theorem with applications to Donaldson-Thomas theory*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 10, 1843–1886. MR 3983293
38. Bjorn Poonen, *The Grothendieck ring of varieties is not a domain*, Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 4, 493–497. MR 1928868
39. M. Rapoport and Th. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. **68** (1982), no. 1, 21–101. MR 666636 (84i:14016)
40. Michel Raynaud and Laurent Gruson, *Critères de platitude et de projectivité. Techniques de "platification" d'un module*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89.

41. R. P. Thomas, *A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on $K3$ fibrations*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 2, 367–438. MR 1818182
42. O. Ya. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic*, Topology and geometry—Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer, Berlin, 1988, pp. 127–138. MR 970076
43. Vladimir Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, pp. 188–238. MR 1764202
44. ———, *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 7, 351–355. MR 1883180
45. ———, *Motivic Eilenberg-MacLane spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), no. 112, 1–99. MR 2737977
46. ———, *On motivic cohomology with $\mathbf{Z}/l$-coefficients*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 401–438. MR 2811603
47. Vladimir Voevodsky, Oliver Röndigs, and Paul Arne Ø stvær, *Voevodsky's Nordfjordeid lectures: motivic homotopy theory*, Motivic homotopy theory, Universitext, Springer, Berlin, 2007, pp. 147–221. MR 2334215