Claude Bardos, lauréat du prix Maxwell 2019

Les travaux de Claude Bardos portent sur une grande variété de problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP). Sa liste de publications comptant actuellement près de deux cents articles, il n'est évidemment pas possible d'en donner une description exhaustive. La présentation qui va suivre s'articule autour de quelques thèmes importants dans l'œuvre mathématique de C. Bardos.

1. Les problèmes aux limites d'ordre un

Considérons l'EDP (équation de transport) d'inconnue $f \equiv f(t,x) \in \mathbf{R}$

$$\partial_t f(t,x) + V(x) \cdot \nabla_x f(t,x) = S(t,x)\,, \tag{1}$$

posée pour $x \in \Omega$, ouvert à bord régulier de $\mathbf{R}^d$, le champ de vecteurs V et la fonction S étant donnés. La méthode des caractéristiques montre qu'il est naturel d'imposer comme donnée au bord de Ω la "restriction" de f à la partie $\partial\Omega^-$ de $\partial\Omega$ où le champ de vecteurs V rentre dans Ω, c'est-à-dire où $V(x) \cdot n_x < 0$, la notation n_x désignant le champ unitaire normal extérieur au bord de Ω.

Dans sa thèse (publiée dans [1]), C. Bardos propose une étude systématique du problème aux limites pour ce type d'équations par des méthodes d'analyse fonctionnelle dans des espaces de type L^p, en précisant le rôle des points caractéristiques du bord (les points $x \in \partial\Omega$ où $V(t,x) \cdot n_x = 0$). Il fait voir par exemple que les valeurs au bord des éléments du domaine de l'opérateur $V \cdot \nabla_x$ (les fonctions $\phi \in L^2(\Omega)$ telles que $V \cdot \nabla_x \phi \in L^2(\Omega)$) ne sont pas forcément dans l'espace $L^2(\partial\Omega, |V \cdot n_x| d\sigma)$, qui serait l'espace naturel pour appliquer la formule de Green-Ostrogradsky, mais seulement dans l'espace $L^2_{loc}(\partial\Omega^-) \cup L^2_{loc}(\partial\Omega^+)$ (en notant $\partial\Omega^+$ la partie de $\partial\Omega$ où $V \cdot n_x > 0$).

Le cas d'équations quasi-linéaires de la forme

$$\partial_t f(t,x) + \nabla_x \cdot A(f(t,x)) = S(t,x)\,, \tag{2}$$

où $A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$, qui se met sous la forme (1) en posant $V(t,x) = A'(f(t,x))$ tant que la solution f est de classe C^1, est évidemment plus complexe, puisque le caractère entrant du vecteur $A'(f(t,x))$ au point $x \in \partial\Omega$ dépend de la solution f que la condition au bord est censée déterminer. En collaboration avec A. le Roux et J.-C. Nédélec [2], C. Bardos propose la formulation de la condition correspondant à prescrire la valeur 0 pour f sur la partie $\partial\Omega^-$ dans le cadre dû à Kruzhkov des solutions entropiques à variation bornée, condition qui s'écrit

$$\min_{-f(t,x)^- \le k \le f(t,x)^+} \operatorname{signe}(f(t,x))(A(f(t,x)) - A(k)) \cdot n_x = 0\,, \quad x \in \partial\Omega\,.$$

2. Les modèles cinétiques

Le système de Vlasov-Poisson décrit la dynamique de particules chargées identiques accélérées par le champ de force coulombien auto-consistant. Autrement dit, chaque particule est accélérée par le champ électrostatique créé par l'ensemble des autres particules. En notant $f \equiv f(t,x,v)$ la densité du nombre de particules animées de la vitesse $v \in \mathbf{R}^d$ à la position $x \in \mathbf{R}^d$ et à l'instant t (appelée "fonction de distribution" en théorie cinétique des gaz), le système de Vlasov-Poisson s'écrit

$$(3)\quad (\partial_t + v\cdot\nabla_x - \nabla_x\Phi(t,x)\cdot\nabla_v)f(t,x,v) = 0\,,\quad -\Delta\Phi(t,x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(t,x,v)dv\,.$$

Le problème de l'existence et unicité de solutions classiques (où f et $-\nabla_x\Phi$ sont de classe C^1 au moins) est difficile en dimension $d=3$, parce que les estimations a priori naturelles (conservation de la masse et de l'énergie, principe du maximum), jointes aux propriétés régularisantes de l'équation de Poisson et aux injections de Sobolev, ne permettent pas de contrôler la croissance de $\nabla_x^2\Phi(t,x)$. C. Bardos et P. Degond eurent les premiers l'idée d'utiliser l'effet dispersif dû l'équation de transport libre, ce qui leur a permis de prouver l'existence et l'unicité de solutions classiques au problème de Cauchy pour le système de Vlasov-Poisson en dimension $d=3$ pour des données "assez petites" et localisées. Cette idée d'utiliser la dispersion est d'ailleurs la clé de l'une [1] des démonstrations (due à P.-L. Lions et B. Perthame [2]) de la régularité des solutions du système de Vlasov-Poisson, cette fois sans l'hypothèse de données initiales petites, démonstration obtenue dans la décennie suivante.

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution statistique des molécules d'un gaz interagissant uniquement lors de collisions binaires élastiques (par exemple comme des boules de billard). Les molécules étant électriquement neutres, il n'y a pas de champ d'accélération auto-consistant comme dans le système de Vlasov-Poisson, mais les collisions entre particules jouent un rôle essentiel. Elles sont décrites par l'intégrale des collisions $\mathcal{C}(f(t,x,v))$, qui dépend de manière quadratique et locale en les variables t de temps et x de position, mais non locale en la variable de vitesse v, de la fonction de distribution f, qui est l'inconnue. L'équation de Boltzmann s'écrit

$$(4)\qquad (\partial_t + v\cdot\nabla_x)f(t,x,v) = \mathcal{C}(f(t,x,v))\,.$$

On sait depuis Maxwell que les fonctions de distributions annulant l'intégrale des collisions sont de la forme dite "maxwellienne"

$$(5)\qquad M[\rho(t,x),u(t,x),\theta(t,x)](v) := \frac{\rho(t,x)}{(2\pi\theta(t,x))^{3/2}}\exp\left(-\frac{|v-u(t,x)|^2}{2\theta(t,x)}\right)\,.$$

Cette fonction de distribution correspond à l'état d'équilibre d'un gaz parfait à la température $\theta > 0$, à la pression $\rho\theta \geq 0$ et animé de la vitesse $u \in \mathbf{R}^3$. Dans des régimes asymptotiques où l'intégrale des collisions joue un rôle prépondérant — par exemple pour des fonctions de distributions lentement variables en t et x, de la forme $f(t,x,v) = F(\epsilon t, \epsilon x, v)$ — on peut espérer que la fonction de distribution F reste voisine d'une maxwellienne dont les paramètres ρ, u, θ évoluerait suivant certaines équations de la dynamique des fluides [3] (Euler, Stokes ou Navier-Stokes, par exemple). Après que R. DiPerna et P.-L. Lions eurent défini une notion de solution "renormalisée" de l'équation de Boltzmann [4] permettant de démontrer un

---

1. L'autre démonstration de régularité des solutions du système de Vlasov-Poisson, due à K. Pfaffelmoser [J. Diff. Eq. 95 (1992), 281–303] s'étend au cas de solutions spatialement périodiques, pour lesquelles il n'y a pas d'effet dispersif.
2. [Invent. Math. 105 (1991), 415–430].
3. On trouvera dans le chapitre 3 du livre [Y. Sone : "Molecular Gas Dynamics", Birkhäuser, Boston, 2007] une analyse très poussée de ces questions.
4. Cf. [Ann. Math. 130 (1989), 321–366].

théorème d'existence sans unicité pour le problème de Cauchy pour l'équation (4), avec une variante inégalité du théorème H de Boltzmann (qui décrit l'évolution de la quantité

$$\iint_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} f(t,x,v)\ln f(t,x,v)dxdv$$

jouant le rôle de l'opposé de l'entropie en thermodynamique), C. Bardos contribua à mettre en place un programme, décrit très précisément dans [10], visant à établir rigoureusement les limites asymptotiques reliant l'équation de Boltzmann aux modèles fondamentaux de la mécanique des fluides. Cette question trouve son origine dans le 6ème problème de Hilbert. L'un des principaux aspects de cette question porte sur la possibilité d'établir ces limites hydrodynamiques sans limitations (quant à la taille, ou aux propriétés de symétrie) sur les solutions des équations de la mécanique des fluides atteintes dans ces limites. Ainsi, la questions centrale de ce programme — aujourd'hui résolue [5] — était de relier la théorie de DiPerna et Lions des solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann aux solutions "turbulentes" de Leray [6] des équations de Navier-Stokes, dont la régularité reste à ce jour un problème ouvert en dimension trois. Le cœur de l'article [10] consistait à exploiter d'une part la production d'entropie donnée par le théorème H de Boltzmann et d'autre part les "lemmes de moyenne" sur les solutions de l'équation de transport [7]. L'article [10] réduisait ainsi le problème de la limite hydrodynamique vers l'équation de Navier-Stokes à la vérification de trois propriétés (trop techniques pour être relatées ici) sur les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann. Le lecteur curieux de ces questions en trouvera une présentation très claire dans l'exposé de C. Villani [17] au séminaire Bourbaki, avec la liste des principaux articles dûs à C. Bardos sur ce sujet antérieurs à 2001 — liste à laquelle il faut ajouter l'article ultérieur [13], fondé sur une théorie asymptotique subtile [8] faisant apparaître la production de chaleur par viscosité.

Toutefois, lorsque les solutions de l'équation limite sont de classe C^∞, on peut tenter de construire une série asymptotique en puissances de ϵ pour $F(\epsilon t,\epsilon x,v)$. Le coefficient de ϵ^n est alors un monôme différentiel de F en les variables ϵt et ϵx. Cette méthode fut proposée par Hilbert en 1912, et la série asymptotique ainsi obtenue porte, en théorie cinétique des gaz, le nom de "développement de Hilbert". Cependant, dans le cas d'un problème aux limites, il faut parvenir à raccorder les conditions aux bord imposées sur le modèle cinétique avec des conditions au bord admissibles pour l'équation de la mécanique des fluides obtenue à la limite lorsque $\epsilon\to 0$. L'un des moyens employés à cet effet consiste à ajouter à la série formelle de Hilbert des termes de couche limite de la forme $F_{CL}(\epsilon t,\epsilon x',\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),v)$, où x' est un système de coordonnées sur le bord. A l'ordre dominant, ce terme de couche limite est solution du problème

(6)
$$-(v\cdot n_{x'})\partial_z F_{CL}+\mathcal{L}F_{CL}=0\,,\quad z>0\,,\qquad F_{CL}(t,x',z,v)\to 0 \text{ quand } z\to+\infty\,,$$

5. F. Golse, L. Saint-Raymond [Invent. Math. 155 (2004), 81–161] et [J. Math. Pures Appl. 91 (2009), 508–552].

6. Cf. [Acta Math. 63 (1934), 193–248].

7. Cf. [F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, J. Funct. Anal. 76 (1988), 110-125].

8. Toutefois ces résultats, qui sont de même nature que la notion d' "effet fantôme" (ghost effect) observés par Y. Sone [loc. cit.], restent pour l'instant au niveau des méthodes asymptotiques formelles.

où $z = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, où $n_{x'}$ est le champ unitaire normal extérieur sur le bord $\partial\Omega$, tandis que $\mathcal{L}$ est la linéarisation de l'intégrale de collision en $M[\rho(t,x), u(t,x), \theta(t,x)]$, les paramètres ρ, u, θ représentant l'état du fluide pour lequel on cherche la condition au bord. Cette condition, que l'on doit adjoindre à l'équation de mécanique des fluides à l'ordre dominant, est obtenue en écrivant les conditions que la solution F_{CL} doit vérifier pour que $F_{CL}(t, x', z, v) \to 0$ soit satisfaite lorsque $z \to +\infty$. Le problème (6) n'est pas vraiment un problème d'évolution où z jouerait le rôle du temps, car le sens de propagation, lié au signe de $v \cdot n_{x'}$ dépend de v. Ce type de problème est connu en astrophysique sous le nom de problème de Milne, et a été résolu dans les années 1920 par E. Hopf et N. Wiener qui ont pu le ramener à un problème de Riemann-Hilbert lorsque $I - \mathcal{L}$ est un opérateur de rang 1, puis (sous une autre forme) par S. Chandrasekhar. Toutefois ces méthodes sont peu robustes, et, bien que s'appliquant au cas du transfert radiatif dans le cadre des atmosphères stellaires, ne permettaient pas, par exemple, de traiter l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz.

Avec R. Santos et R. Sentis dans le cadre de l'équation de Boltzmann linéaire décrivant le transport des neutrons dans les matériaux fissiles, puis en collaboration avec R. Caflisch et B. Nicolaenko dans le cadre de l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz, C. Bardos proposa dans [6, 7] une méthode d'énergie radicalement différente, fondée sur les estimations a priori pour les quantités invariantes ou dissipées du problème, et qui permet de traiter ce type d'équation dans la plus grande généralité possible (cas d'intégrales de collision plus générales que celle du transfert radiatif, problèmes non linéaires [9], conditions aux limites non locales de type "condition d'accomodation" de Maxwell...)

3. La propagation des ondes

Considérons l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u(t,x) - \Delta_x u(t,x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,, \qquad u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7}$$

où $\Omega = \mathbf{R}^d \setminus K$, et où K est un compact de $\mathbf{R}^d$ à bord lisse. On s'intéresse à la question suivante : comment la présence de l'obstacle K modifie-t-elle la propagation des ondes dans le vide, c'est-à-dire dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^d$? C'est le cœur du problème dit de la "diffusion" pour la propagation des ondes. Une notion importante pour la propagation des ondes à l'extérieur de l'obstacle K est celle de "résonance". Notons Δ_D le laplacien dans Ω avec condition de Dirichlet homogène sur le bord $\partial\Omega$, ainsi que l'opérateur

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_D & 0 \end{pmatrix}$$

La résolvante $(\lambda I - A)^{-1}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ à valeurs opérateurs, dont les pôles $\{\mu_k \,|\, k \geq 0\}$ forment une partie discrète du demi-plan $\mathrm{Re}(z) < 0$. Ces pôles sont les résonances associées à l'obstacle K et gouvernent le comportement en temps grand des solutions de (7) dont les données de Cauchy sont à support compact.

9. Cf. par exemple S. Ukai, T. Yang, S.-H. Yu [Commun. Math. Phys. 236 (2003), 373–393 et 244 (2004), 99–109].

En collaboration avec J.-C. Guillot et J. Ralston, C. Bardos étudie dans [4] le support singulier de l'expression

$$T = \sum e^{-i\mu_k t}$$

vue comme distribution en la variable t, que l'on interprète comme la trace du groupe engendré par A auquel on retire le groupe libre des ondes dans l'espace $\mathbf{R}^d$. Par analogie avec la formule sommatoire de Poisson sur le tore $\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ que l'on écrit au sens des distributions en la variable $\xi \in \mathbf{R}^d$ sous la forme

$$\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} e^{-i\xi\cdot x} = (2\pi)^d \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \delta(\xi - 2\pi k)\,,$$

le support singulier de a distribution T met en jeu des longueurs liées à la géométrie de l'obstacle K [10]. En particulier, l'article [4] contient un calcul très explicite de la distribution T lorsque K est la réunion de deux boules de rayon 1 distantes de $d > 0$, qui fait intervenir un unique rayon "captif" de l'optique géométrique se réfléchissant successivement sur les deux boules [11].

Lorsqu'au contraire l'obstacle K n'a aucun rayon captif, et que son bord ∂K est analytique, C. Bardos, en collaboration avec G. Lebeau et J. Rauch établit dans [8] que les résonances vérifient une inégalité de la forme

$$\mathrm{Re}(\mu_k) \leq -C|\mu_k|^{1/3}\,, \qquad k \geq 0\,,$$

où C est une constante strictement positive. Lorsque K est convexe et que ∂K est de courbure strictement positive, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch montrent que cette majoration est optimale en donnant une borne inférieure pour la constante C mettant en jeu la courbure du bord et le premier zéro de la fonction d'Airy.

4. Le contrôle

L'optique géométrique, qui n'est rien d'autre que la théorie asymptotique des solutions à haute fréquence de l'équation des ondes, joue un rôle essentiel dans les résultats portant sur les résonances associées à la propagation d'ondes à l'extérieur d'un obstacle évoqués au paragraphe précédent. On va voir que cette théorie asymptotique joue également un rôle important dans un problème différent, celui du contrôle ou de la stabilisation des ondes se propageant dans un domaine borné Ω de $\mathbf{R}^d$ à bord $\partial\Omega$ régulier [12]. On cherche à "piloter" la solution d'une équation de Klein-Gordon

$$\partial_t^2 u(t,x) - \Delta_x u(t,x) + u(t,x) = 0\,, \quad x \in \Omega\,, \qquad u\Big|_{t=0} = \partial_t u\Big|_{t=0} = 0 \tag{8}$$

10. L'idée d'utiliser une formule de trace dans le problème de la diffusion pour la propagation des ondes à l'extérieur d'un obstacle se retrouve dans [P. Lax, R. Phillips : Topics in Functional Analysis, I. Gohberg, M. Kac eds. Academic Press Inc. 1979, pp. 197–215], ainsi que [J. Chazarain : Comm. Partial Diff. Eq. 5 (1980), 595–644].

11. L'étude détaillée des résonances engendrées par ce type d'obstacle fait l'objet de plusieurs travaux de M. Ikawa, comme par exemple [Hokkaido Math. J. 12 (1983), 343–359], ou [Osaka J. Math. 22 (1985), 657–689].

12. Cette problématique remonte aux travaux de J.-L. Lions sur le contrôle des EDP, problématique exposée dans plusieurs de ses cours au Collège de France, et dont on trouvera un exposé clair et précis dans son livre ["Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués", Masson, Paris 1988].

en agissant sur une partie ω ouverte du bord $\partial\Omega$. Autrement dit, on postule que la solution u vérifie une condition au bord de la forme

$$(9) \qquad u\Big|_{]0,T[\times\partial\Omega} = v\,, \quad \text{avec } v\Big|_{]0,T[\partial\Omega\setminus\omega} = 0\,,$$

ce qui signifie qu'on agit par la commande v *uniquement sur la partie* ω du bord $\partial\Omega$ pendant un temps T. La question est de savoir si l'on peut ainsi faire en sorte que la solution u de (8) atteigne une donnée de Cauchy quelconque à $t = T$, à savoir

$$(u(T,\cdot), \partial_t u(T,\cdot)) = (f, g)$$

en partant de la condition initiale nulle. Du point de vue des applications, il s'agit plutôt que de contrôler la solution de l'équation de Klein-Gordon (8), de résoudre le problème analogue pour l'équation des ondes élastiques, c'est-à-dire de contrôler ou de stabiliser les vibrations dans une structure solide en agissant sur une partie bien choisie du bord de la structure par des mécanismes (par exemple par des servo-commandes) convenablement positionnés.

Intuitivement, plus le domaine d'action de la commande ω est grand, plus on a de chance de parvenir à piloter la solution. Plus précisément, C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch ont donné dans [9] la caractérisation suivante des domaines ω du bord $\partial\Omega$ sur lesquels on pouvait contrôler la solution de (8). Cette condition nécessaire et suffisante porte le nom de "condition géométrique de contrôle", et peu s'énoncer comme suit, à quelques détails techniques près :

"Tout rayon de l'optique géométrique issu de Ω rencontre la région de contrôle ω dans l'intervalle de temps $[0, T]$".

La principale difficulté technique dans la démonstration de ce résultat consiste à suivre la propagation de singularités microlocales des solutions de l'équation (8) en interaction avec le bord $\partial\Omega$. Intuitivement on conçoit que la condition de Dirichlet (9) correspond à une réflexion spéculaire sur la partie inactive $\Omega\setminus\overline{\omega}$ — encore faut-il préciser cette notion de réflexion spéculaire, par exemple dans le cas où le rayon rencontre ω tangentiellement. Cette étude a été menée systématiquement par R. Melrose et J. Sjöstrand, et le résultat principal de [9] utilise leurs idées de façon cruciale.

5. La mécanique statistique quantique

La description d'édifices moléculaires en chimie quantique repose sur le calcul des états quantiques des électrons des divers atomes de la molécule. En principe, on doit donc étudier l'équation de Schrödinger à N corps, où N est le nombre d'électrons mis en jeu, soumis à l'interaction coulombienne répulsive des autres électrons, et à celle, attractive, des différents noyaux. La fonction d'onde inconnue d'un tel système est donc de la forme

$$(10) \qquad \Psi_N(t, x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{C}\,, \qquad \int_{\mathbf{R}^{3N}} |\Psi_N(t, x_1, \ldots, x_N)|^2 dx_1 \ldots dx_N = 1\,.$$

D'autre part, les électrons obéissant à la statistique de Fermi-Dirac, la fonction d'onde Ψ_N est anti-symétrique, c'est-à-dire que

$$(11) \qquad \Psi_N(t, x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(N)}) = -\Psi_N(t, x_1, \ldots, x_N)\,,$$

pour toute transposition échangeant deux des indices parmi $1, \ldots, N$ et laissant tous les autres invariants.

Malheureusement, un modèle de ce type est inexploitable du point de vue des simulations numériques, parce qu'il faudrait discrétiser une fonction définie sur un espace de très grande dimension. En pratique, on préfère partir de modèles réduits, basés sur l'hypothèse que Ψ_N est proche en un certain sens d'une fonction d'un type particulier lorsque $N \to \infty$. La forme la plus simple consiste à postuler que

$$\Psi_N(t, x_1, \ldots, x_N) = \tfrac{1}{\sqrt{N!}} \text{dét}(\psi_k(t, x_l))_{1 \le k,l \le N} ,$$

où $(\psi_j(t, \cdot))_{1 \le j \le N}$ est, pour tout t, une famille orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^3)$. Ceci conduit à la théorie de Hartree-Fock, les fonctions ψ_j portent le nom d' "orbitales", et le déterminant ci-dessus celui de "déterminant de Slater". On accède à une description plus riche avec la méthode de Hartree-Fock multi-configurations, qui consiste à approcher Ψ_N par une *combinaison linéaire finie* de déterminants de Slater

$$\Psi_N(t, x_1, \ldots, x_N) = \sum_{m=1}^{r} c_m(t) \text{dét}(\psi_k^m(t, x_l))_{1 \le k,l \le N} .$$

Les travaux de C. Bardos sur ce sujet extrêmement vaste incluent (a) la formalisation systématique des limites "de champ moyen" (auxquelles l'approximation de Hartree-Fock appartient) au moyen de la théorie de Cauchy-Kowalewski "abstraite" à la Nirenberg-Ovsyannikov dans une échelle d'espaces de Banach [13] convenable [11], (b) la justification de l'approximation de Hartree-Fock dépendant du temps [12], et (c) l'une des premières études du formalisme de Hartree-Fock multi-configurations du point de vue mathématique dans [14]. On trouvera une inroduction plus détaillée à ce sujet, incluant les principales contributions de C. Bardos antérieures à 2004, dans l'exposé de P. Gérard au séminaire Bourbaki [16].

6. Problèmes mathématiques de la mécanique des fluides

Outre le problème des limites hydrodynamiques de la théorie cinétique des gaz évoqué plus haut, C. Bardos s'est intéressé très tôt à divers problèmes mathématiques intervenant en mécanique des fluides, et cette thématique reste au cœur de ses recherches actuelles.

On trouvera ainsi, parmi les travaux "anciens" de C. Bardos en mécanique des fluides, un des premiers résultats sur l'existence et unicité du problème de Kelvin-Helmholtz pour les fluides incompressibles non visqueux. Rappelons qu'il s'agit de décrire l'évolution d'un fluide dont la vorticité (le rotationnel du champ des vitesses) est initialement concentrée sur une courbe (en dimension deux) ou une surface (en dimension trois). On peut penser par exemple à un écoulement de cisaillement de part et d'autre d'une surface. C. Bardos, U. Frisch, C. et P.-L. Sulem ont résolu ce problème [14] en temps fini pour des données analytiques dans [3], en utilisant un théorème de Cauchy-Kowalewski "abstrait". Ce résultat répond à une conjecture de G. Birkhoff datant de 1962. Un calcul antérieur sur la croissance des modes de Fourier pour le problème linéarisé faisait voir que le cadre analytique est naturel pour ce problème. Il y a plus : si une solution faible de l'équation d'Euler en

13. Dans le théorème traditionnel de Cauchy-Kowalewski, on considère la famille indexée par $r > 0$ des espaces de Banach de fonctions holomorphes sur la bande ouverte $|\Im(z)| < r$, continues bornées sur la bande fermée $|\Im(z)| \le r$.

14. Lorsque la vorticité est une mesure de signe constant, un résultat remarquable de J.-M. Delort [J. of the Amer. Math. Soc. 4 (1991) 553-586] obtenu par un procédé radicalement différent établit l'existence — mais non l'unicité — pour tout temps d'une solution faible de l'équation d'Euler en dimension deux d'espace.

dimension deux d'espace voit sa vorticité portée par une famille de courbes fermées simples engendrant une surface höldérienne de l'espace-temps, alors cette surface est analytique, ainsi que la vorticité qu'elle porte [15]. Autrement dit, toute solution faible de l'équation d'Euler possédant une structure géométrique (höldérienne) de nappe de tourbillon est nécessairement du type étudié dans [3]. Cette "rigidité" du problème des nappes de tourbillon provient du fait que l'équation d'Euler en dimension deux d'espace se comporte comme une équation elliptique.

En dimension trois d'espace, en revanche, il y a une grande différence entre solutions faibles et solutions classiques de l'équation d'Euler des fluides incompressibles, d'inconnue (u,p), où u est le champ (vectoriel) des vitesses du fluide et p le champ (scalaire) de pression, équation que l'on peut écrire sous la forme

$$\partial_t u_i + \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(u_i u_j) + \partial_{x_i} p = 0\,, \quad i = 1,2,3\,, \qquad \nabla_x \cdot u = 0\,. \tag{12}$$

On peut évidemment considérer cette équation au sens des distributions pourvu que u soit localement de carré sommable en toutes ses variables. Toutefois, chercher à résoudre l'équation d'Euler dans ce contexte conduit à des paradoxes gênants sur le plan physique. Par exemple, on peut construire [16] des solutions de (12) à support compact en t et x. Autrement dit, il existe des solutions au sens des distributions de (12) de carré sommable décrivant un fluide initialement au repos, qui entrerait soudain en mouvement pendant un laps de temps fini, pour retourner ensuite au repos. Ce comportement viole évidemment la conservation de l'énergie cinétique

$$E(t) := \int_{\mathbf{R}^3} |u(t,x)|^2 dx$$

qui est constante lorsque u est solution de classe C^1 de (12). On peut donc se demander à partir de quel seuil de régularité sur les solutions (12) l'énergie E est conservée, ce qui éliminerait le paradoxe ci-dessus. Une conjecture d'Onsager datant de 1949 suggérait que ce seuil est la régularité höldérienne d'exposant 1/3. Cette conjecture fut démontrée par P. Constantin, W. E, G. Eyink and E. Titi [17] dans le cas où le domain spatial où évolue le fluide n'a pas de bord (par exemple dans l'espace entier $\mathbf{R}^3$, ou dans le tore $\mathbf{T}^3$) par une preuve aussi brève qu'astucieuse. Ce n'est que récemment que cet énoncé a été démontré dans le cas physiquement réaliste d'un ouvert à bord de classe C^2, par C. Bardos et E. Titi [15].

Cet aperçu des travaux de Claude Bardos rend évidemment compte d'une grande variété dans les sources d'inspiration de leur auteur, ainsi que dans les thèmes mathématiques mis en jeu. On y trouvera cependant un fil conducteur commun : dans la plupart des résultats obtenus par Claude Bardos, le formalisme mathématique est construit autour des quantités intervenant dans les principes physiques universels. C'est ainsi que l'entropie intervient de manière cruciale dans le programme sur les limites hydrodynamiques décrit dans [17], et dans la formulation des conditions aux limites pour les lois de conservation [2] ; de même l'asymptotique à haute fréquence, qui intervient dans l'étude des résonances dans la théorie de la diffusion,

15. Cf. [Lebeau, ESAIM COCV 8 (2002), 801–825].
16. C'est le paradoxe de Scheffer [J. Geom. Anal. 3 (1993), 343–401], récemment traité par la méthode d'intégration convexe de Gromov [DeLellis-Szekelyhidi : Ann. Math. 170 (2009), 1417–1436].
17. [Commun. Math. Phys., 165 (1994), 207–209].

se retrouve au cœur de ses travaux sur le contrôle, la stabilisation et l'observabilité pour la propagation des ondes.

Références

[1] Bardos, C. : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 3 1970, 185–233

[2] Bardos, C., le Roux, A., Nédélec, J.-C. : First order quasilinear equations with boundary conditions. Comm. Partial Differential Equations 4 (1979), 1017–1034.

[3] Sulem, C., Sulem, P.-L., Bardos, C., Frisch, U. : Finite time analyticity for the two- and three-dimensional Kelvin-Helmholtz instability. Comm. Math. Phys. 80 (1981), 485–516.

[4] Bardos, C., Guillot, J.-C., Ralston, J. : La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion. Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), 905–958.

[5] Bardos, C., Degond, P. : Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 space variables with small initial data. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985), 101–118.

[6] Bardos, C., Santos, R., Sentis, R. : Diffusion approximation and computation of the critical size. Trans. Amer. Math. Soc., 284 (1984), 617–649.

[7] Bardos, C., Caflisch, R., Nicolaenko, B. : The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas. Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), 323–352.

[8] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. : Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities. Invent. Math. 90 (1987), 77–114.

[9] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. : Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. SIAM J. Control Optim. 30 (1992), 1024–1065.

[10] Bardos, C., Golse, F., Levermore, C.D. : Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II : Convergence Proofs for the Boltzmann Equation. Comm. on Pure and Applied Math., XLVI (1993), 667–753.

[11] Bardos, C., Erdös, L., Golse, F., Mauser, N., Yau, H.-T. : Derivation of the Schrödinger–Poisson equation from the quantum N-body problem. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 334 (2002), 515–520.

[12] Bardos, C., Golse, F., Gottlieb, A., Mauser, N. : Accuracy of the time-dependent Hartree-Fock approximation for uncorrelated initial states. J. Statist. Phys. 115 (2004), 1037–1055.

[13] Bardos, C., Levermore, C. D., Ukai, S., Yang, T. : Kinetic equations : fluid dynamical limits and viscous heating. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) 3 (2008), 1–49.

[14] Bardos, C., Catto, I., Mauser, N., Trabelsi, S. : Setting and analysis of the multi-configuration time-dependent Hartree-Fock equations. Arch. Ration. Mech. Anal. 198 (2010), 273–330.

[15] Bardos, C., Titi, E. : Onsager's Conjecture for the Incompressible Euler Equations in Bounded Domains. Arch. Rational Mech. Anal. 228 (2018), 197–207.

[16] Gérard, P. : Equations de champ moyen pour la dynamique quantique d'un grand nombre de particules. Sém. Bourbaki 2003-2004, exp. 930, 147–164.

[17] Villani, C. : Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann. Sém. Bourbaki 2000-2001, exp. 893, 365–405.