

ARBRES ET FLEURS DANS LA LUMIÈRE REFRACTÉE

OLGA PARIS-ROMASKEVICH

Cette note est un compte-rendu détaillé de l'exposé que j'ai donné à l'occasion de l'ouverture de l'amphithéâtre Maryam Mirzakhani à l'Université de Rennes 1, le 15 octobre 2019. Elle donne une introduction aux billards dans les pavages, à travers l'exemple d'un billard dans un pavage triangulaire périodique. Ne sont présentées ici que les idées clés de [3, 4, 7], pour plus de détails, voir la présentation complète dans [7].

Les slides de mon exposé sont accessibles dans [6]. Certaines constructions décrites ci-dessous y sont présentées à travers des vidéos (pliage, feuilletages parallèles, contraction d'une trajectoire périodique dans son feuilletage parallèle), intégrées dans le diaporama. Ces vidéos, ainsi que le petit film d'animation très touchant (voir <https://youtu.be/t1r1c01V35I>) sont réalisées par Ofir David, que je remercie pour cette collaboration. Les images des trajectoires sont dessinées avec un programme de Alex St Laurent et Pat Hooper, accessible sur <http://awstlaur.github.io/negsnel/>.

Préface

J'ai commencé à étudier la dynamique des surfaces plates en 2017, l'année de la mort de Maryam Mirzakhani. Ce n'est qu'à ce moment que j'ai lu l'article [5] d'Erica Klarreich à propos de son travail, qui m'a beaucoup marqué. Je connaissais un certain nombre de témoignages de mathématicien.ne.s à propos de leurs premières rencontres avec les mathématiques, leurs façons de les percevoir, les faire et les partager. Mais je n'ai jamais entendu une mathématicienne parler de ses intentions par rapport aux mathématiques, et surtout de cette façon profondément respectueuse qu'avait Maryam Mirzakhani. « *Dans un certain sens, faire des mathématiques c'est comme écrire un roman. Il y a [en mathématiques] des personnages différents, et on apprend à mieux les connaître. Des choses évoluent, et puis en regardant un personnage plus tard, on s'aperçoit qu'il est complètement différent de la première impression.* »¹

En voyant les objets mathématiques comme des personnages à découvrir, je pense que je suis devenue meilleure mathématicienne, et surtout, j'ai commencé à aimer les mathématiques, beaucoup plus qu'auparavant. Je suis heureuse qu'il y ait désormais un amphithéâtre qui porte le nom de Maryam Mirzakhani, pour que sa pensée aide de nombreux autres à aimer les mathématiques.

Billard dans un pavage triangulaire périodique

Laissons tout d'abord notre personnage principal se présenter lui-même. Voici, sur la Figure [1], la trajectoire d'un système dynamique auquel nous nous intéressons. Le pavage sous-jacent est un pavage du plan obtenu par un pavage standard de triangles équilatéraux via une transformation linéaire. Ce sont ces pavages, modulo homothétie, que nous étudions ici. Ils sont paramétrés par un 2-simplex des angles (α, β, γ) des tuiles qui les forment, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Qu'est-ce que fait la trajectoire de Figure [1]? Elle se déplace d'une tuile à l'autre, en suivant des segments droits dans chacune des tuiles. Puis, en traversant une arête entre deux tuiles,

1. Ceci est la traduction d'un passage de [5] : *In a way, she said, mathematics research feels like writing a novel. "There are different characters, and you are getting to know them better," she said. "Things evolve, and then you look back at a character, and it's completely different from your first impression."*

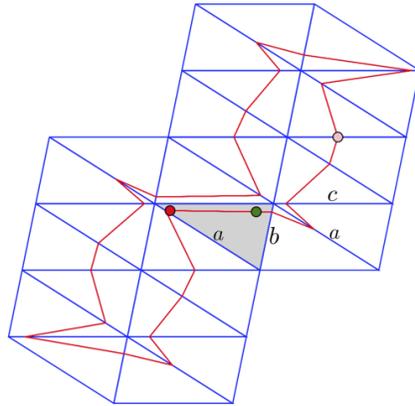


FIGURE 1. Une trajectoire périodique dans un pavage triangulaire périodique.

la trajectoire change de direction en suivant la loi de Snell-Descartes avec un coefficient de réfraction égal à -1 . En général, nous étudierons ici la dynamique de toute trajectoire sujette à ces règles locales sur un pavage triangulaire, pour les différents paramètres (α, β, γ) des angles et différentes conditions initiales des trajectoires.

Cette étude est motivée par deux raisons principales. Tout d'abord, le billard dans un pavage est le modèle mathématique du mouvement de la lumière dans des matériaux hétérogènes avec un coefficient de réfraction égal à -1 . Même si cela peut paraître surprenant au premier abord, ces méta-matériaux sont assez simples à construire à partir de cristaux photoniques. Ils ont des applications intéressantes, notamment en optique (avec des caps d'invisibilité) et en acoustique (avec des milieux à haute isolation sonore). Et puis, du point de vue purement mathématique, les billards dans des pavages sont d'un intérêt évident car ils sont liés à l'étude des feuilletages verticaux sur des surfaces plates *non-orientables*, un cas peu exploré de la théorie générale. Les billards dans des pavages triangulaires ont un intérêt particulier par leur liaison avec la famille d'Arnoux-Rauzy, une famille classique d'échanges d'intervalles sur un cercle, que nous définissons vers la fin de cette note.

Pliage et comportement qualitatif

Nous observons très facilement qu'un billard dans un pavage en triangles *équilatéraux* a *toutes* ses orbites périodiques de période 6. On pourrait imaginer que cette abondance d'orbites périodiques provient des symétries du triangle équilatéral, et n'existerait donc pas dans un pavage triangulaire générique. Pourtant, des familles d'orbites périodiques y persistent.

Théorème 1. [3] *Pour un pavage triangulaire périodique fixé et un billard dans ce pavage, les assertions suivantes ont lieu :*

1. *toute trajectoire passe par chaque tuile au plus une fois, et la distance orientée entre le segment de cette trajectoire dans une tuile θ fixée et le centre du cercle circonscrit de θ , est un invariant de cette trajectoire (ne dépend pas de la tuile θ traversée par la trajectoire) ;*
2. *toute trajectoire bornée est une courbe fermée simple (est périodique !)* ;
3. *toute trajectoire périodique est stable, c'est-à-dire qu'après une déformation par un petit changement des conditions initiales ou de la forme des tuiles, la trajectoire obtenue est toujours périodique, et passe par les mêmes tuiles dans le même ordre.*

À certains égards, un billard dans un pavage triangulaire ressemble à un problème à 2 corps planétaires, ainsi qu'à un oscillateur harmonique. En effet, toute trajectoire bornée de ces trois systèmes est périodique, ce qui est une propriété très rare pour un système dynamique générique. Tous ces systèmes portent des invariants de mouvement.

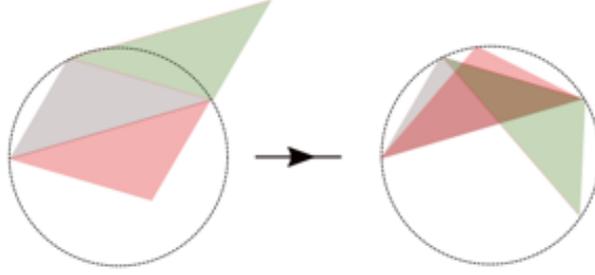
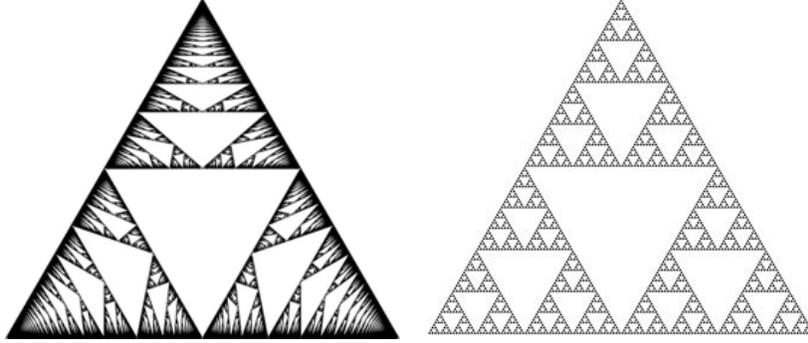


FIGURE 2. Un morceau du pavage qui se plie dans le même cercle.

FIGURE 3. La baderne de Rauzy \mathcal{R} (à gauche) est homéomorphe au triangle de Sierpinski (à droite).

La preuve du Théorème 1 est une simple conséquence du *pliage*. En effet, le pavage triangulaire *se plie* entièrement à l'intérieur d'un cercle, de telle façon que la trajectoire se plie dans une corde de ce cercle. Cette idée très simple, illustrée ici par la Figure 2, est à la base de tous les résultats sur les billards dans les pavages triangulaires.

Le Théorème 1 implique que toute trajectoire est soit **périodique**, soit **s'échappe à l'infini**. Comme nous prouvons avec P. Hubert dans [4], pour presque tout pavage par rapport à la mesure de Lebesgue sur Δ_2 , toutes les trajectoires d'un billard sont soit *périodiques*, soit *s'échappent à l'infini de façon linéaire*, c'est-à-dire restent à distance bornée d'une certaine droite. Ces deux comportements sont donc les comportements génériques. Cependant, pour des pavages très rares, et pour des conditions initiales très peu nombreuses de trajectoires, un échappement non-linéaire est possible.

Théorème 2. [4, 7] Soit $\rho_\Delta \in \Delta_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_j \geq 0, j = 1, 2, 3\}$ tel que

$$\rho_\Delta := \left(1 - \frac{2}{\pi}\alpha, 1 - \frac{2}{\pi}\beta, 1 - \frac{2}{\pi}\gamma\right). \quad (1)$$

Alors si un pavage triangulaire périodique est tel qu'il admet des trajectoires de billard qui s'échappent à l'infini de façon non-linéaire, alors $\rho_\Delta \in \mathcal{R}$ et ces trajectoires passent par les centres des cercles circonscrits de toutes les tuiles qu'elles traversent. Ici l'ensemble \mathcal{R} est l'intérieur de la **baderne de Rauzy**.

La baderne de Rauzy est un ensemble remarquable qui apparaît naturellement comme l'ensemble des paramètres des systèmes dynamiques intéressants dans plusieurs contextes. Pour une définition précise et plus de références, voir par exemple [2, 7]. L'ensemble $\mathcal{R} \subset \Delta_2$ est de mesure de Lebesgue nulle, homéomorphe au triangle de Sierpinski, voir Figure 3.

Une trajectoire est **exceptionnelle** si tout d'abord, le pavage dans lequel elle se promène se caractérise par $\rho_\Delta \in \mathcal{R}$ et puis, si elle passe par le centre du cercle circonscrit d'une des

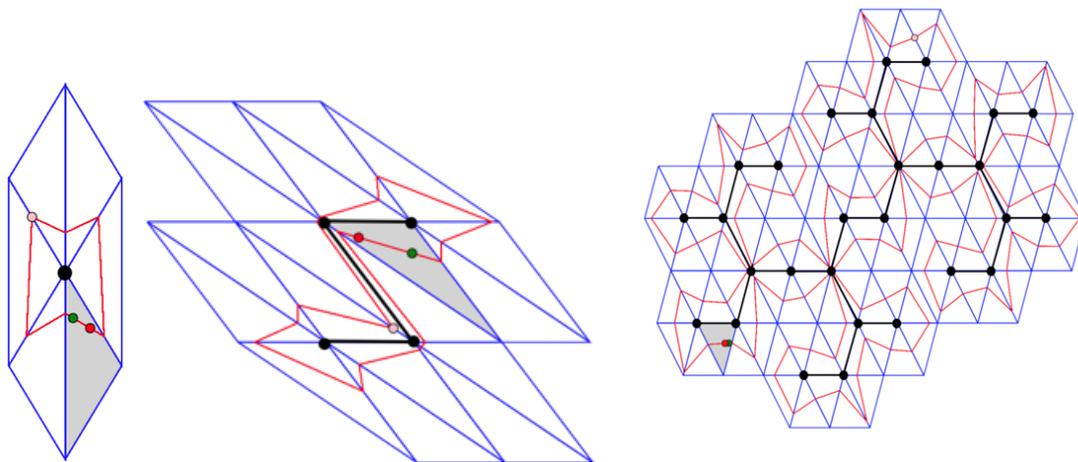


FIGURE 4. *Trajectoires périodiques et leurs arbres.*

tuiles (et donc, de toute tuile) qu'elle traverse. Il n'est pas très difficile de prouver que des trajectoires exceptionnelles s'échappent toujours à l'infini, mais la compréhension plus précise de leur comportement asymptotique et symbolique reste une question ouverte.

Conjecture de l'arbre et des feuilletages parallèles

Revenons pour l'instant aux trajectoires périodiques de notre billard. En observant leur comportement symbolique, nous pouvons y voir des arbres, comme sur la Figure 4.

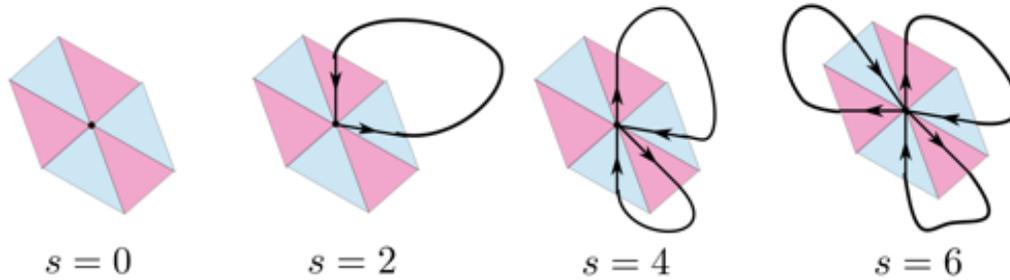
Théorème 3 (Conjecture de l'arbre). *Soit Λ_Δ un graphe du pavage triangulaire périodique (ses sommets (arêtes) sont les sommets (arêtes) des tuiles). Soit δ une trajectoire de billard dans ce pavage. Alors le graphe $G_\Delta^\delta := \Omega^\delta \cap \Lambda_\Delta$ (considéré comme un sous-graphe de Λ_Δ) est un arbre. Autrement dit, la trajectoire δ passe par toutes les tuiles qui intersectent le domaine Ω^δ , $\partial\Omega^\delta = \delta$.*

Cette Conjecture a été formulée dans [3] et prouvée dans [7]. Notre preuve est élémentaire et elle utilise des *feuilletages parallèles* dans des pavages triangulaires. Grâce à ces feuilletages, chacune des trajectoires est incluse dans une famille de trajectoires, ce qui permet de mieux comprendre son comportement.

L'idée de la construction d'un feuilletage parallèle est la suivante. La trajectoire d'un billard se plie dans une corde l d'un cercle en suivant le pliage du pavage, toujours comme sur la Figure 2. En découpant ce cercle dans une famille de cordes parallèles à l , et puis en *dépliant* cette famille de nouveau sur le plan pavé, nous obtenons un feuilletage orientable du plan pavé par des trajectoires du billard, voir un exemple de Figure 5.

Un feuilletage parallèle est singulier, avec des singularités dans les sommets du graphe Λ_Δ . Nous appelons chacune des composantes connexes singulières de ce feuilletage une **fleur**. Nous prouvons que toutes les fleurs bornées de ces feuilletages ont un des comportements topologiques de la Figure 6, en supposant qu'elles ne passent que par un sommet de Λ_Δ (ce qui est typique). Autrement dit, les pétales des fleurs bornées ne peuvent pas avoir des indices différents en tant que courbes fermées simples, « un pétale ne peut pas manger un autre pétale ». Ceci est la *Conjecture des fleurs*.

Ceci est suffisant pour prouver le Théorème 3 en contractant une trajectoire périodique δ sur des fleurs à l'intérieur de Ω^δ , dans son feuilletage parallèle. Bien sûr, la difficulté principale réside dans le fait de prouver la Conjecture des fleurs. Pour ce faire, une meilleure compréhension de la dynamique symbolique est nécessaire. Un autre outil entre en jeu, la renormalisation.

FIGURE 5. *Un feuilletage parallèle colorié. Dessin par Ofir David.*FIGURE 6. *Comportements possibles des fleurs bornées dans des feuilletages parallèles.*

Renormalisation

Soit $\mathcal{A}_\Delta := \{a, b, c\}$ un alphabet de trois lettres. À chaque trajectoire dans un pavage triangulaire, on associe son codage symbolique dans cet alphabet comme la séquence des arêtes traversée par cette trajectoire. Par exemple, le codage symbolique de la trajectoire de la Figure 1 est donné par un mot périodique bi-infini \bar{w} avec une période minimale $w = abacacacbacac$ correspondant à la moitié de la trajectoire. Le but de 7 est de décrire l'ensemble des mots obtenus comme codages symboliques des trajectoires d'un billard dans un pavage triangulaire.

Dans 3, Baird-Smith, Davis, Fromm et Iyer ont déduit, en utilisant le pliage, qu'étudier une trajectoire dans un pavage triangulaire est la même chose qu'étudier l'orbite d'une application de cercle dans lequel le pavage triangulaire se plie. Cette application est en fait un échange de 3 intervalles avec retournements appartenant à la famille CET_τ^3 que nous définissons maintenant.

Soit $(l_1, l_2, l_3) \in \Delta_2$. Découpons un cercle \mathbb{S}^1 de longueur 1 dans 3 intervalles $I_j, |I_j| = l_j$ qui ne s'intersectent pas. Soit $F_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une composition de 3 involutions qui commutent, sur chacun de ces intervalles. Alors $F \in \text{CET}_\tau^3$ si et seulement si $F = R_\tau \circ F_0$, où R_τ est une rotation par $\tau \in \mathbb{S}^1$, voir Figure 7. La dynamique d'une trajectoire dans un pavage est décrite par une application dans CET_τ^3 avec $l_1 = \frac{\alpha}{\pi}, l_2 = \frac{\beta}{\pi}, l_3 = \frac{\gamma}{\pi}$. Le paramètre τ correspond à la distance jusqu'au centre du cercle circonscrit, $\tau = \frac{1}{2}$ est équivalent au fait que cette distance est égale à zéro.

Nous trouvons un processus de renormalisation dans la famille CET_τ^3 qui est décrit dans un théorème suivant.

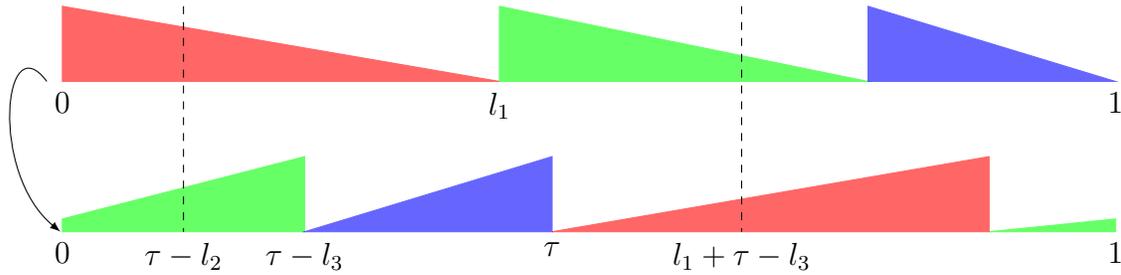


FIGURE 7. L'application $F = F_\tau^{l_1, l_2, l_3} \in \text{CET}_\tau^3$ et, ici, un intervalle S_3 d'induction.

Théorème 4. Soit $F = F_\tau^{l_1, l_2, l_3} \in \text{CET}_\tau^3$ avec $\tau \in [0, \frac{1}{2}]$ et soit $\max\{l_j\}_{j=1}^3 \leq \frac{1}{2}$, $\tau > \max\{l_j\}_{j=1}^3$ et soit $l_j = \min\{l_j\}_{j=1}^3$ pour un certain $j \in \{1, 2, 3\}$. Alors $T = F^2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est un échange de 6 intervalles I_j^\pm de longueur $|I_j^\pm| = \frac{x_j}{2} \pm r$ avec $x_j = 1 - 2l_j$, $j = 1, 2, 3$ et $r = 1/2 - \tau$. En plus de cela, I_j^+ et I_j^- , ainsi que $T(I_j^+)$ et $T(I_j^-)$, sont voisins.

Soit $S_j := I_j^+ \cup I_j^- =: (s_j^-, s_j^+)$, et nous considérons un cercle $S_j/s_j^- \sim s_j^+$. Alors l'application de premier retour sur ce cercle est bien définie, et si $R_j F : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ est cette application renormalisée pour être définie sur un cercle de longueur 1, alors, $R_j F \in \text{CET}_\tau^3$! Ses nouveaux paramètres $(l'_1, l'_2, l'_3, \tau')$ $\in \Delta_2 \times [0, 1/2]$ sont définis par des relations suivantes : $[l'_1 : l'_2 : l'_3] = [l_1 - l_3 : l_2 - l_3 : l_3]$ et $\tau' = \frac{1}{2} - r'$, $r' = \frac{r}{|S_3|} \geq r$.

L'idée de renormalisation en dynamique est la suivante. On regarde un système dynamique sous une loupe. Si pour un sous-ensemble de son ensemble de définition, l'application de premier retour sur cet ensemble s'avère avoir une forme proche ou, dans le cas du Théorème 4, identique au système initial, nous disons qu'il existe un processus de renormalisation. Il y a une phrase qui circule parmi les dynamiciens, « nous ne savons que renormaliser ». Bien sûr, on ne peut pas apprendre à renormaliser une fois pour toutes, comme chaque contexte attend sa propre renormalisation. Une fois trouvé, ce processus d'induction aide à répondre à beaucoup de questions concernant la dynamique. Pour donner un exemple dans notre contexte, voici un des corollaires du Théorème 4 qui s'avère suffisant pour prouver la Conjecture des fleurs, et donc, la Conjecture de l'arbre.

Théorème 5 (Conjecture $4n + 2$ dans [3]). [7] Soit δ une trajectoire périodique dans un pavage triangulaire. Alors son codage symbolique s'écrit comme le carré d'un mot de longueur impaire. Par conséquent, sa période est égale à $4n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Autres corollaires de la renormalisation : la classification générale des trajectoires, et la convergence des trajectoires dans un billard de Tribonacci à la fractale de Rauzy.

Classification des trajectoires

En réunissant les outils de feuilletages parallèles et la renormalisation, nous pouvons obtenir la classification suivante des trajectoires. Soit $\mathcal{E} \subset \Delta_2$ un ensemble dénombrable obtenu d'un point $[1 : 1 : 1] = (1/3, 1/3, 1/3) \in \Delta_2$ en appliquant une transformation suivante : choisir une des coordonnées et l'ajouter à deux autres, puis renormaliser. Par exemple, $[1 : 2 : 2], [3 : 2 : 5] \in \mathcal{E}$. Soit \mathcal{E}_Δ l'ensemble des angles (α, β, γ) tels que $(\alpha/\pi, \beta/\pi, \gamma/\pi) \in \mathcal{E}$. En plus, soit \mathcal{R}_Δ l'ensemble des angles (α, β, γ) tel que $\rho_\Delta \in \mathcal{R}$.

Théorème 6. [7] Pour un billard dans un pavage triangulaire, nous avons une classification suivante en dépendance des valeurs des angles :

1. si $(\alpha, \beta, \gamma) \notin \mathcal{R}_\Delta \cup \mathcal{E}_\Delta$ alors toute trajectoire sur ce pavage est soit périodique, soit s'échappe de façon linéaire à l'infini, en plus, le nombre de comportements périodiques possibles (et donc, d'arbres possibles) est fini ;
2. si $\rho \in \mathcal{R}_\Delta$ alors toute trajectoire est périodique (s'échappe à l'infini) si et seulement si elle ne passe pas (elle passe) par le centre circonscrit d'une tuile, en plus, le nombre de comportements périodiques possibles (et donc, d'arbres possibles) est infini (dénombrable) ;
3. $\rho \in \mathcal{E}_\Delta$ si et seulement si toute trajectoire est périodique.

Famille d'Arnoux-Rauzy

L'hyperplan $\{\tau = \frac{1}{2}\}$ correspond à la famille des applications spéciales dans CET_τ^3 . Tout d'abord, la sous-famille $\text{CET}_{\frac{1}{2}}^3$ est invariante sous renormalisation du Théorème [4] et puis, les trajectoires exceptionnelles (les seules qui peuvent avoir un comportement non-linéaire) ne correspondent qu'aux applications issues de $\text{CET}_{\frac{1}{2}}^3$. En fait, les carrés des applications dans $\text{CET}_{\frac{1}{2}}^3$ forment la famille classique d'Arnoux-Rauzy $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$ des échanges de 6 intervalles sur \mathbb{S}^1 , avec des paramètres dans Δ_2 .

Découpons un cercle \mathbb{S}^1 en 6 intervalles disjointes de longueurs $\frac{x_j}{2}, j = 1, 2, 3$ tels que des intervalles de longueurs égales sont voisins. Alors une application $T^{x_1, x_2, x_3}, (x_1, x_2, x_3) \in \Delta_2$ **appartient à la famille d'Arnoux-Rauzy**, $T^{x_1, x_2, x_3} \in \text{AR}(\mathbb{S}^1)$, si et seulement si c'est une composition de deux involutions : d'abord, un échange simultané de deux intervalles de longueurs égales et puis, une rotation $R_{\frac{1}{2}}$. La famille $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$ était définie par P. Arnoux et G. Rauzy dans [1] et représente un intérêt important pour notre communauté. Quelle est la liaison entre la famille $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$ et les billards dans des pavages triangulaires ? En fait, il s'avère que les deux ensembles suivants coïncident :

$$\{T^{x_1, x_2, x_3} \in \text{AR}(\mathbb{S}^1), (x_1, x_2, x_3) \in \Delta_2\} = \left\{ F^2 \mid F_{\frac{1}{2}}^{l_1, l_2, l_3} \in \text{CET}_{\frac{1}{2}}^3, (l_1, l_2, l_3) \in \Delta_2, \max(l_j) < \frac{1}{2} \right\}.$$

En plus, ici $x_j = 1 - 2l_j, j = 1, 2, 3$. Cela a été démontré dans [4] et puis dans [7], nous avons élargi l'ensemble à droite pour obtenir tout l'ensemble CET_τ^3 et l'ensemble à gauche pour obtenir l'ensemble de rel-déformations des applications dans $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$. Les billards dans les pavages triangulaires offrent donc un nouveau regard sur ces applications. Des trajectoires de billards qui passent par les centres des cercles circonscrits des tuiles correspondent donc aux orbites des applications dans $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$, les autres trajectoires correspondent aux orbites de leurs rel-déformations.

Un exemple : application d'Arnoux-Yoccoz et une fractale de Rauzy

L'application $T^{\mathbf{a}} := T^{\mathbf{a}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3} \in \text{AR}(\mathbb{S}^1)$ avec $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{a} + \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^3 = 1$ est une **application d'Arnoux-Yoccoz**. Cette application est minimale, c'est-à-dire a toutes ses orbites denses. Et c'est, dans un certain sens, « la plus simple » application minimale dans $\text{AR}(\mathbb{S}^1)$. Elle a beaucoup de propriétés d'auto-similarité. En fait, en général, l'application $T^{x_1, x_2, x_3} \in \text{AR}(\mathbb{S}^1)$ est minimale si et seulement si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}$. Ceci a été prouvé par Arnoux et Rauzy mais découle aussi du Théorème [4]. Pour l'application $F^{\mathbf{a}} \in \text{CET}_{\frac{1}{2}}^3$ avec $l_1 = 1/2(1 - \mathbf{a}), l_2 = 1/2(1 - \mathbf{a}^2), l_3 = 1/2(1 - \mathbf{a}^3)$, nous savons déjà que $F^{\mathbf{a}} \circ F^{\mathbf{a}} = T^{\mathbf{a}}$ avec $F^{\mathbf{a}}$ un point fixe de la renormalisation. À l'application d'Arnoux-Yoccoz correspond un **pavage triangulaire périodique de Tribonacci** où les tuiles ont des angles définies par

$$\alpha = \frac{\pi}{2}(1 - \mathbf{a}), \beta = \frac{\pi}{2}(1 - \mathbf{a}^2), \gamma = \frac{\pi}{2}(1 - \mathbf{a}^3).$$

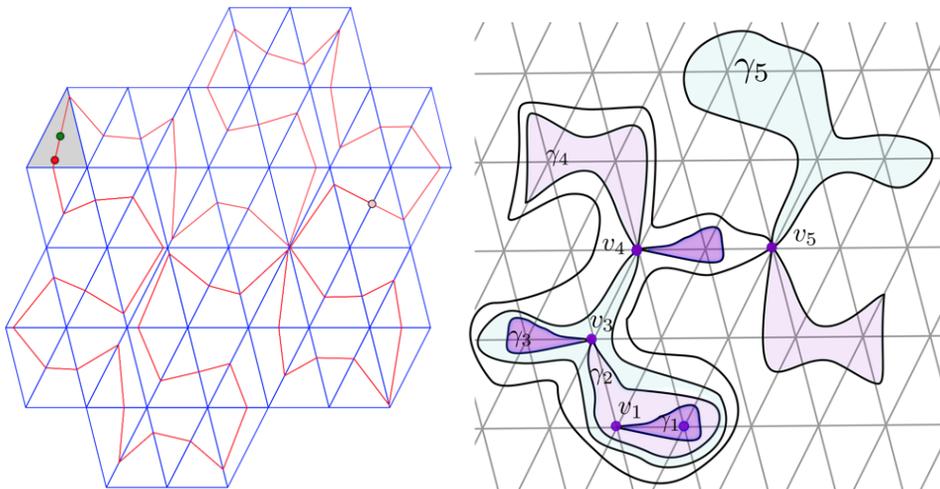


FIGURE 8. Une trajectoire de billard de Tribonacci et une représentation topologique des fleurs dans son feuilletage parallèle. La fleur avec un pistil v_5 a son plus grand pétale qui « mange » la fleur au niveau précédent (avec un pistil v_4), ses deux autres pétales ont des combinatoires de fleurs de niveaux 3 et 2.

Ces angles sont approximativement $\alpha \approx 41^\circ, \beta \approx 63^\circ, \gamma \approx 76^\circ$. Nous appelons un billard dans un pavage correspondant un **billard de Tribonacci**. Il s'avère que les fleurs de ce billard grandissent de la même façon que la construction itérative d'une fractale de Rauzy, voir Figure 8. Cela implique que les périodes des trajectoires périodiques sont les doubles des nombres de Tribonacci $T_{n+4}, n \in \mathbf{N}^*$. Des nombres T_n sont définis via la relation $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, $T_1 = T_2 = T_3 := 1$. Cela implique la conjecture de Hooper et Weiss sur la convergence des orbites arithmétiques de l'application T^a vers la fractale de Rauzy.

Dernière question

Un pavage triangulaire peut être remplacé par un pavage de quadrilatères cycliques, en préservant l'assertion du Théorème 1. Nous ne savons pas encore comment prouver la conjecture de l'arbre (qui a l'air d'être vraie!...) ni s'il existe un processus de renormalisation pour la famille CET_7^4 . Ceci reste à explorer!

RÉFÉRENCES

- [1] P. Arnoux, G. Rauzy, *Représentation géométrique des suites de complexité $2n+1$* , Bulletin de la SMF, 119 :2, 199–215 (1991)
- [2] P. Arnoux, S. Starosta, *The Rauzy gasket*, Birkhäuser Boston. Further Developments in Fractals and Related Fields, Springer Science+Business Media New York, 1–23, Trends in Mathematics (2013)
- [3] P. Baird-Smith, D. Davis, E. Fromm, S. Iyer, *Tiling billiards on triangle tilings, and interval exchange transformations*, preprint, http://www.swarthmore.edu/NatSci/ddavis3/triangle_tiling_billiards.pdf (2018+)
- [4] P. Hubert, O. Paris-Romaskevich *Triangle tiling billiards and the exceptional family of their escaping trajectories : circumcenters and Rauzy gasket*, Experimental mathematics, <https://doi.org/10.1080/10586458.2019.1583615> (2019)
- [5] E. Klarreich, *A Tenacious Explorer of Abstract Surfaces*, Quanta Magazine (2014)
- [6] O. Paris-Romaskevich, *Arbres et fleurs dans la lumière refractée*, exposé à l'ouverture de l'amphithéâtre Maryam Mirzakhani, <https://drive.google.com/file/d/1zwckoEwaCiD0ZDFtWSrrt7X5SeWYwfeG/view?usp=sharing>
- [7] O. Paris-Romaskevich, *Trees and flowers on a billiard table*, preprint, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02169195> (2019+)