

## VERS UNE DESCRIPTION GÉNÉRALE DES AUTO-INTERSECTIONS DÉRIVÉES

Le but de la géométrie algébrique dérivée est de transposer des techniques de nature homotopique en topologie algébrique dans le cadre de la géométrie algébrique, c'est-à-dire pour des variétés définies par des équations polynomiales. Pour une introduction historique détaillée, on renvoie le lecteur à l'article d'exposition [8]

Commençons par illustrer ce principe sur un exemple classique : les quotients homotopiques. Si  $G$  est un groupe topologique, la construction de Milnor (cf [6 4.11]) définit un  $G$ -fibré principal explicite  $\pi : \mathbf{E}G \rightarrow \mathbf{B}G$  permettant de classier tous les autres  $G$ -fibrés principaux admettant un recouvrement trivialisant dénombrable. Plus précisément, un tel fibré principal  $p: P \rightarrow X$  est obtenu en tirant en arrière le fibré  $\mathbf{E}G$  par une application continue  $f: X \rightarrow \mathbf{B}G$  dont la classe d'homotopie est unique. On peut formaliser ceci en un isomorphisme de foncteurs contravariants

$$\{G\text{-fibrés de base } X\} / \text{isomorphisme} \simeq \mathcal{C}^0(X, \mathbf{B}G) / \text{homotopie} \quad (1)$$

de la catégorie des espaces topologiques vers les ensembles. L'ensemble  $\mathbf{E}G$  est caractérisé par la propriété suivante : c'est un espace topologique faiblement contractile (c.-à.-d. toute image continue d'une sphère topologique dans  $\mathbf{E}G$  peut être contractée sur un point) sur lequel  $G$  agit continument et librement. Cet espace est unique à équivalence faible d'homotopie. Par exemple,  $\mathbf{E}\mathbb{Z}$  est la droite réelle  $\mathbb{R}$  munie de l'action par translation de  $\mathbb{Z}$ , et  $\mathbf{B}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ .

Pour tout espace sur lequel  $G$  agit continument, on définit le quotient homotopique  $[X/G]$  de  $X$  par  $G$  (appelé aussi quotient de Borel) de la manière suivante : on remplace  $X$  par l'espace  $X \times \mathbf{E}G$ , puis on le quotiente ensuite par l'action de  $G$ , qui se trouve être libre. Par exemple,  $[\bullet/G] = \mathbf{B}G$ . Cette construction est la version homotopique de la construction de l'espace des orbites usuel sous l'action d'un groupe.

La construction des quotients homotopiques peut être adaptée dans le monde de la géométrie algébrique, en introduisant la notion de champ algébrique (cf. [7]). Pour faire un parallèle avec la notion de distribution en analyse fonctionnelle, l'idée est d'élargir la catégorie des variétés algébriques en utilisant la dualité : l'analogue de l'espace des fonctions tests est l'ensemble des variétés algébriques usuelles  $\mathbf{Alg}$ , et la « distribution » associée à une variété algébrique  $X$  est en première approximation le foncteur contravariant de  $\mathbf{Alg}$  dans  $\mathbf{Set}$  donné par

$$Y \rightarrow \{\text{morphisms algébriques de } Y \text{ dans } X\}$$

On plonge de cette manière la catégorie des variétés algébriques dans une catégorie plus grosse : la catégorie des champs algébriques, qui sont des foncteurs (en un sens à préciser) de  $\mathbf{Alg}$  dans la 2-catégorie des groupoïdes<sup>1</sup> vérifiant des conditions spécifiques. Les champs associés à des variétés algébriques sont appelés représentables. Une fois ces objets introduits, la notion de quotient homotopique devient naturelle si l'on se base sur (1) : par exemple le champ  $\mathbf{B}G$  est défini comme le foncteur

$$Y \rightarrow \{G\text{-fibrés algébriques sur } Y\},$$

mais n'est pas représentable en général. Plus généralement, le champ  $[X/G]$  est donné par le foncteur qui à  $Y$  associe le groupoïde dont les objets sont les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi} & X \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

où  $P \rightarrow Y$  est un  $G$ -fibré principal et  $\Phi$  est  $G$ -équivariante.

1. Un groupoïde est une catégorie où tous les morphismes sont inversibles. Tout ensemble est un groupoïde si on le considère comme catégorie discrète, c.-à.-d. que les seuls morphismes sont les identités.

L'enrichissement des variétés algébriques aux champs algébriques ne permet malheureusement pas d'encoder toutes les opérations homotopiques classiques. Une opération essentielle est le produit fibré homotopique : étant données deux applications continues  $f: X \rightarrow Z$  et  $g: Y \rightarrow Z$ , le produit fibré homotopique  $X \times_Z^h Y$  est obtenu en remplaçant  $Y$  par un espace homotopiquement équivalent  $\widetilde{Y}$ , tel que l'application  $\widetilde{g}: \widetilde{Y} \rightarrow Z$  soit une fibration topologique. On pose alors

$$X \times_Z^h Y = X \times_Z \widetilde{Y}.$$

La nécessité de construire l'analogue d'une telle opération en géométrie algébrique est impérative<sup>2</sup>, et la technologie des champs algébriques s'avère dans ce cas parfaitement inopérante. Résoudre ce problème conduit à introduire des objets géométriques plus sophistiqués, qui sont les schémas dérivés.

Le modèle local permettant de comprendre les variétés algébriques est la catégorie des algèbres commutatives de type fini : une telle algèbre définit un idéal d'une algèbre de polynômes – l'idéal des relations entre les générateurs – et par suite une variété algébrique donnée par le lieu d'annulation de ces polynômes. Dans le monde de la géométrie algébrique dérivée, on remplace les algèbres par les algèbres différentielles graduées, appelées dg-algèbres. Rappelons-en la définition : une dg-algèbre commutative est une algèbre commutative graduée  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_{-n}$  munie d'une différentielle  $\delta$  de degré 1 et de carré nul satisfaisant la règle de Leibniz

$$\delta(u \star v) = \delta(u) \star v + (-1)^{\text{degré}(u)} u \star \delta(v)$$

Un schéma dérivé est localement décrit par une algèbre différentielle graduée  $(A, \star, \delta)$ , et on peut lui associer une variété algébrique classique en ne conservant que l'algèbre commutative  $H^0(A^\bullet)$ .

Les premiers exemples naturels de produits fibrés homotopiques non triviaux en géométrie algébrique sont issus de la théorie de l'intersection : on considère deux sous-variétés algébriques fermées  $X$  et  $Y$  d'une variété algébrique ambiante  $Z$ , et l'on cherche à comprendre l'objet  $X \times_Z^h Y$ . Si  $X$  et  $Y$  s'intersectent transversalement, on démontre que ce produit fibré est l'intersection « algébrique » de  $X$  et de  $Y$ , et il n'y a pas de structure additionnelle de nature dérivée. Par contre si l'intersection n'est pas transverse, la situation est plus compliquée à comprendre, et fait apparaître tous les ingrédients géométriques intervenant dans la théorie de l'intersection raffinée de Fulton [2].

Donnons maintenant un aperçu de ce qui peut se passer dans le cas des auto-intersections : si  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $r$ , l'auto intersection  $\bullet \times_E^h \bullet$  d'un point dans  $E$  est associée à la dg-algèbre formelle<sup>3</sup>  $(\Lambda^\bullet E^*, \wedge, 0)$ , où  $E^*$  est en degré  $-1$ . Regardons plus attentivement l'exemple où  $E$  est le corps de base  $k$ . Dans ce cas  $\bullet \times_k^h \bullet$  est modelé sur la dg-algèbre formelle  $\text{Sym}(k[1])$ . Une façon duale de voir explicitement ce dernier point est d'effectuer le produit fibré homotopique  $0 \times_k^h 0$  dans la catégorie

des complexes d'espaces vectoriels. Un remplacement fibrant de  $0$  est le morphisme  $k \xrightarrow{\text{id}} k$  donc le

$$\begin{array}{ccc} 0 & & k \xrightarrow{\text{id}} k \\ \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ k & & k \end{array}$$

produit fibré homotopique est  $k[-1]$ . Le schéma dérivé associé associé a ainsi pour algèbre de fonctions  $\text{Sym}(k[1])$ .

La généralisation de ce calcul au cas de l'auto-intersection d'une sous-variété algébrique est non triviale et a une longue histoire, qui commence bien avant la naissance de la géométrie algébrique dérivée avec l'isomorphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg [5]. Grâce aux travaux d'Arinkin et Căldăraru [1], on sait maintenant caractériser géométriquement les sous-variétés dont on peut globalement modéliser l'auto-intersection dérivée par un faisceau en dg-algèbres formelles. Cependant, lorsque ces conditions géométriques ne sont pas satisfaites, la structure globale de l'auto-intersection dérivée reste pour l'instant hors d'atteinte.

2. Pour les spécialistes, entre autres raisons afin de lever l'hypothèse de platitude dans [?, Proposition 9.3], ou de fournir une interprétation plus conceptuelle de la théorie de l'intersection raffinée développée dans [?].

3. Une algèbre différentielle graduée  $(A, \star, \delta)$  est formelle si le morphisme  $\delta$  est nul.

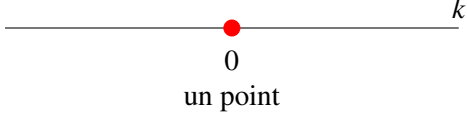
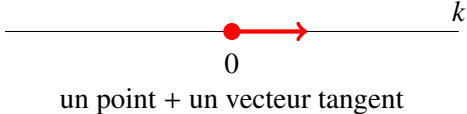
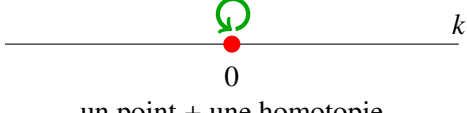
<i>Définition</i>	<i>Représentation géométrique</i>	<i>Description algébrique</i>
$\{x = 0\}$ dans $k$	 un point	$k$
$\{x^2 = 0\}$ dans $k$	 un point + un vecteur tangent	$k[x]/(x^2 = 0)$
$0 \times_k^h 0$	 un point + une homotopie	$k \oplus k[1]$

FIGURE 1. Trois objets géométriques différents

Dans l'article [3] on présente une description géométrique complète de l'auto-intersection d'une sous-variété arbitraire dans son premier voisinage linéarisé, ce qui est une approximation au premier ordre de l'auto-intersection dérivée globale. C'est un premier pas dans la compréhension d'objets fascinants mais difficiles à appréhender géométriquement, et qui sont en tout cas loin d'avoir livré tous leurs secrets.

### Références :

- [1] D. Arinkin and A. Caădaăaru. When is the self-intersection of a subvariety a fibration ? *Advances in Mathematics*, 231(2) : 815 ?842, October 2012.
- [2] W. Fulton. *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. DOI : 10.1007/978-1-4612-1700-8.
- [3] J. Grivaux. *Derived geometry of the first formal neighborhood of a smooth analytic cycle*, 2015.
- [4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 1977. DOI : 10.1007/978-1-4757-3849-0.
- [5] G. Hochschild, Bertram Kostant, and Alex Rosenberg. *Differential forms on regular affine algebras*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 102 :383 ?408, 1962.
- [6] D. Husemoller. *Fibre Bundles*, volume 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 1994.
- [7] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Springer, 2000.
- [8] B. Toën. *Derived algebraic geometry*. In *EMS Surveys in Mathematical Sciences*, volume 1, pages 153 ?240, 2014.

**Contact** : Julien Grivaux, jgrivaux@math.cnrs.fr, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373.