# SUR QUELQUES TRAVAUX DE MIRZAKHANI

ELISE GOUJARD

Ce texte est un bref compte-rendu de l'exposé sur les travaux de Mirzakhani donné à l'occasion de l'inauguration de l'amphithéâtre Mirzakhani à l'université de Rennes 1 le 15 octobre 2019.

## 1. Introduction

*« Maryam Mirzakhani a apporté des contributions frappantes et très originales à la géométrie et à l'étude des systèmes dynamiques. Son travail sur les surfaces de Riemann et sur les espaces de modules met en relation plusieurs disciplines mathématiques — la géométrie hyperbolique, l'analyse complexe, la topologie, et la dynamique — et les influence à son tour. Elle a bénéficié d'une vaste reconnaissance pour ses premiers résultats en géométrie hyperbolique, et son travail le plus récent constitue une avancée majeure dans l'étude des systèmes dynamiques. »* (comité de la médaille Fields)

J'ai choisi d'évoquer deux résultats (aux travers de deux problèmes applicatifs) qui sont pour moi représentatifs de la diversité de ses travaux :

— Un résultat pour les surfaces hyperboliques (issu de sa thèse, 2004 et 2008)

— Un résultat pour les surfaces plates (plus récent, avec Eskin et Mohammadi, 2015)

## 2. Géodésiques sur les surfaces hyperboliques

Une géodésique est dit simple si elle ne s'auto-intersecte pas. Voici par exemple une question naturelle à propos des géodésiques simples :

**Problème 1.** *Soit $X$ une surface hyperbolique de genre 2 et $\gamma$ une géodésique fermée simple sur $X$ (cf Figure 1). Quelle est la probabilité que $\gamma$ sépare la surface en deux morceaux ?*

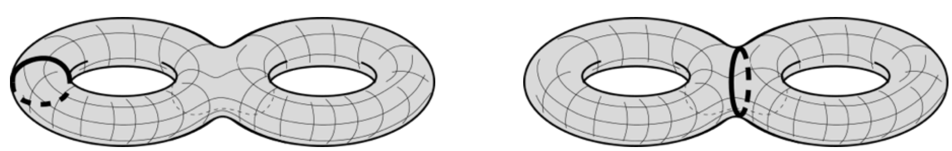

FIGURE 1. Une géodésique non séparante (à gauche) et une séparante (à droite)

On va voir que cette question (rendue rigoureuse) peut être résolue grâce aux résultats de Mirzakhani sur le comptage des géodésiques simples.

Dans une série de travaux des années 40 à 60, Delsarte, Huber et Selberg démontrent le résultat suivant sur le comptage de géodésiques (quelconques) sur les surfaces hyperboliques, grâce à des méthodes d'analyse harmonique :

---

*Date*: 30 octobre 2019.

**Théorème 1** (Delsarte, Huber, Selberg)**.** *Le nombre de géodésiques fermées $\gamma$ de longueur inférieure à $L$ sur une surface hyperbolique $X$ est*

$$\sharp\{\gamma \subset X, l(\gamma) \leq L\} \sim \frac{e^L}{L} \text{ quand } L \to +\infty.$$

Ce théorème souvent appelé "théorème des nombres premiers pour les géodésiques" est à comparer au théorème classique suivant sur le nombre de nombres premiers :

**Théorème 2** (Théorème des nombres premiers, Hadamard, La Vallée Poussin, 1896)**.** *Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $e^L$ est*

$$\pi(e^L) \sim \frac{e^L}{L} \text{ quand } L \to +\infty.$$

L'analogie entre ces deux théorèmes repose sur l'analogie entre les fonctions zeta de Selberg et zeta et Riemann, le problème se ramenant à compter des points d'un certain réseau.

Dans sa thèse, Mirzakhani montre que le nombre de géodésiques fermées simples est asymptotiquement polynomial (des bornes étant déjà connues précédemment) :

**Théorème 3** (Mirzakhani, 2004)**.** *Le nombre de géodésiques fermées **simples** $\gamma$ de longueur inférieure à $L$ sur une surface hyperbolique $X$ de genre $g$ est*

$$N(X,L) \sim C_X L^{6g-6} \text{ quand } L \to +\infty.$$

Ce premier résultat repose sur une convergence de mesures de comptage vers une mesure naturelle sur l'espace des feuilletages mesurés (complétion de l'espace des multicourbes rationnelles), la mesure de Thurston.

En fait, elle montre ensuite le résultat plus général et plus précis suivant, sur le comptage des multicourbes de type topologique fixé (le type topologique encodant plus d'information sur les courbes, par exemple le fait qu'elle soient séparantes ou non).

**Théorème 4** (Mirzakhani, 2008)**.** *Pour toute multicourbe rationnelle $\gamma$ et toute surface hyperbolique $X$ (de genre $g$ et à $n$ pointes), le nombre de multicourbes géodésiques simples fermées sur $X$ , de longueur $\leq L$, et de type topologique $\gamma$ est :*

$$N(X,L,\gamma) \sim B(X) \cdot \frac{c(\gamma)}{b_{g,n}} \cdot L^{6g-6+2n} \quad \text{quand } L \to \infty,$$

*où $B(X)$ ne dépend que de la métrique hyperbolique sur $X$, $c(\gamma)$ ne dépend que du type topologique de $\gamma$ et $b_{g,n}$ ne dépend que de $g$ et $n$, toutes ces constantes étant explicites.*

Ce résultat utilise des méthodes de convergence de mesures, mais il repose de plus sur l'idée clé suivante : au lieu de fixer une surface hyperbolique et de considérer l'ensemble de géodésiques dessus, Mirzakhani considère un type de multicourbe fixé, et fait varier la métrique hyperbolique sur la surface ; plus précisément, elle considère l'intégrale de la fonction longueur (des courbes) sur l'espace de modules de toutes les métriques hyperboliques sur X, $\mathcal{M}_{g,n}$. Ce processus d'intégration permet en particulier de relier ce comptage au volume des espaces de modules de surfaces hyperboliques à bords, ce qui conduit également aux deux autres résultats célèbres de sa thèse, le calcul des volumes de Weil-Petersson et la preuve alternative de la conjecture de Witten.

Pour revenir au problème de départ, les résultats de Mirzakhani permettent en particulier de calculer le rapport de $c(\gamma_{sep})$ sur $c(\gamma_{nonsep})$ et donc de calculer la fréquence avec laquelle une courbe simple est séparante ou non (au sens du Théorème 4). Dans notre cas, en genre 2 avec $n = 0$, une géodésique simple sépare la surface avec probabilité 1/48.

## 3. LE THÉORÈME DE LA BAGUETTE MAGIQUE D'ESKIN-MIRZAKHANI ET LE PROBLÈME D'ILLUMINATION

En 1958 le fils et le père Penrose proposent dans le *New Scientist* des petits problèmes pour Noël, dont voici l'un d'eux : est-il possible de construire une table de billard telle qu'il existe deux régions A et B telles qu'une balle lancée dans une région n'entre jamais dans l'autre ?

Cette question est un avatar du problème d'illumination, qu'on peut formuler comme suit :

**Problème 2.** *Dans une salle tapissée de miroirs, est-il possible d'éclairer toute la salle à partir d'une seule source lumineuse (ponctuelle) ?*

La Figure 2 représente une solution au problème de Penrose et donc une réponse négative au problème d'illumination.

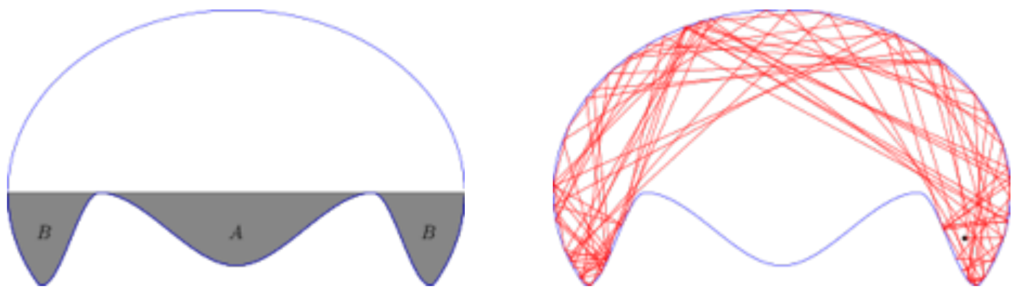


FIGURE 2. Zones ne s'éclairant pas mutuellement et trajectoire d'un rayon de lumière émis depuis la zone $B$

Cet exemple repose sur les propriétés très spécifiques de l'ellipse. Mais le problème d'illumination se pose aussi naturellement dans les polygones.

En 1995 Tokarsky construit l'exemple suivant (Figure 3), qui apporte un contre-exemple au problème d'illumination dans le cas des polygones : le point à gauche "éclaire" toute la salle, à l'exception du point à droite.

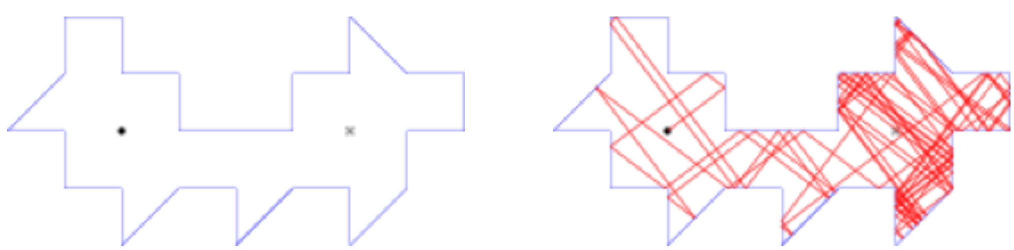

FIGURE 3. Example de Tokarsky : depuis le point à gauche, toute la table est illuminée, sauf le point à droite.

Cet exemple est en un sens le pire qui puisse arriver, comme l'ont montré récemment Lelièvre, Monteil et Weiss, grâce au théorème de la baguette magique d'Eskin-Mirzakhani, résolvant ainsi le problème d'illumination dans tous les polygones à angles rationnels :

**Théorème 5** (Lelièvre-Monteil-Weiss, 2014)**.** *Dans une salle à angles rationnels, n'importe quel point éclaire toute la salle à l'exception d'un nombre fini de points.*

Voici quelques idées de la preuve, résumées en dessin.

La première étape consiste à voir qu'une trajectoire de billard (ou trajet de la lumière dans la salle avec miroirs), correspond à une trajectoire en ligne droite (segments parallèles recollés par translation) dans une surface appelée "surface de translation" obtenue à partir de la table polygonale par symétries successives (Figure 4).

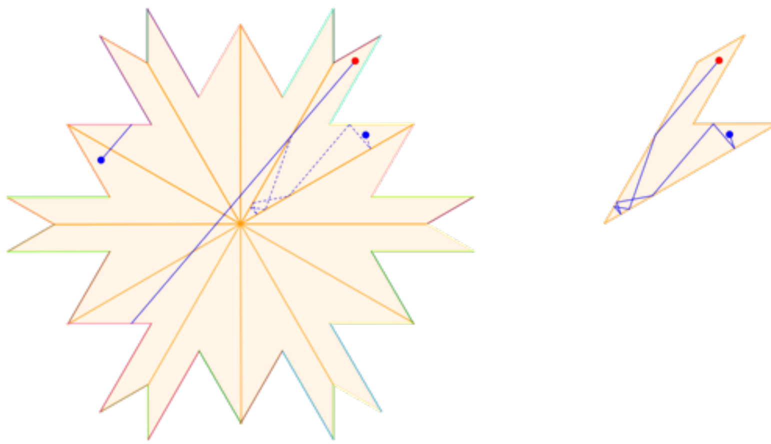

FIGURE 4. Dépliage de la trajectoire

On peut ensuite appliquer une série de transformations, comme déformer la surface par l'action de $GL(2, \mathbb{R})$ (Figure 5), ou couper et recoller des morceaux de la surface par translation (Figure 6).

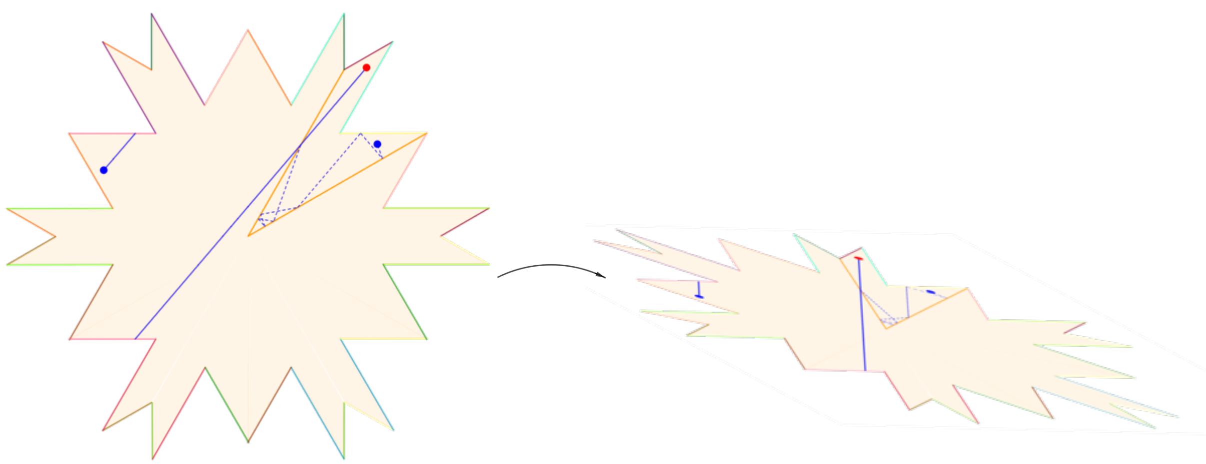

FIGURE 5. Action du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{R})$

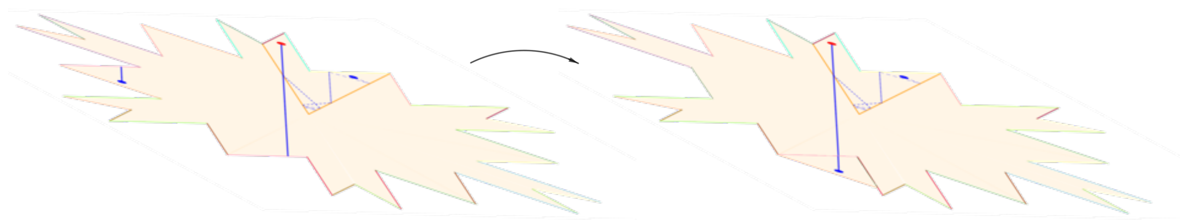

FIGURE 6. Couper-Coller

Ces transformations préservent le parallélisme et permettent d'amener une trajectoire (potentiellement compliquée) sur un segment court reliant directement les points voulus (Figure 7). En procédant à l'envers ceci donne en fait un moyen de construire la trajectoire voulue dans la table de départ. Le point clé de la preuve est donc de comprendre l'ensemble de toutes les surfaces obtenues par des séries de déformations précédentes.

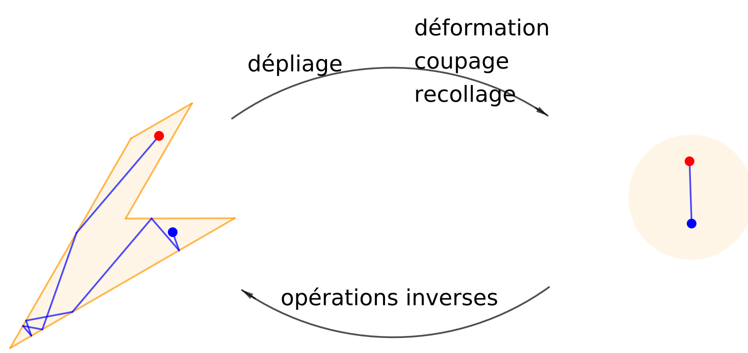


FIGURE 7. Idée de résolution du problème d'illumination

L'espace de toutes les surfaces de translation modulo couper-coller est appelé espace de modules des surfaces de translation. L'ensemble des surfaces obtenues par les transformations précédentes correspond à la $GL(2,\mathbb{R})$-orbite d'un point de cet espace de modules. C'est la qu'intervient le coup de baguette magique d'Eskin-Mirzakhani !

**Théorème 6** ("de la baguette magique", Eskin-Mirzakhani, E-M-Mohammadi, 2015)**.** *Pour chaque surface de translation, l'adhérence de l'orbite par l'action de $GL(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété linéaire de l'espace de module.*

Ces ensembles de surfaces obtenues par déformation sont donc en fait très simples et jolis (ce qui permet d'appliquer d'un coup de baguette les résultats connus pour les espaces de modules entiers sur ces sous-espaces). Ce théorème a également de "magique" sa rigidité comparable à la situation dans les espaces homogènes, décrite par le théorème de Ratner suivant (alors que l'espace de module des surfaces de translation est très loin d'être homogène) !

**Théorème 7** (Ratner, $\sim$ 90)**.** *"Dans un espace homogène, l'adhérence des orbites par l'action d'un sous-groupe unipotent est un espace homogène"*

## 4. RÉFÉRENCES

Les vidéos suivantes m'ont fortement inspirées pour la partie sur le problème d'illumination, je les recommande vivement :

— "The illumination problem", Numberphile, H. Masur,
  `https://www.youtube.com/watch?v=xhj5er1k6GQ`
— "Public Opening of the Fields Symposium 2018", A. Wilkinson
  `https://www.youtube.com/watch?v=zjccKzHIniw`

Pour aller plus loin, plusieurs excellents articles sont dédiés à la présentation des travaux de Mirzakhani :

— A. Zorich, *Maryam Mirzakhani (1977–2017)*. Eur. Math. Soc. Newsl. No. 107 (2018), 28–33.
— A. Wright, *A tour through Mirzakhani's work on moduli spaces of Riemann surfaces*, `arXiv:1905.01753` , 2019.
— C. McMullen, *The work of Maryam Mirzakhani*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. 1, 73–79, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
— *Maryam Mirzakhani, 1977-2017*, Notices of the AMS, July 18, 2017