Résumé

En 1949, le mathématicien hongrois István Sándor Gál, alors attaché de recherche au CNRS, publie la démonstration d'une conjecture datant des années 1930 et portant sur la taille maximale d'une quantité de nature arithmétique, appartenant à une large famille dont les éléments sont désignés à présent comme des « sommes de Gál ». Il a fallu attendre les travaux de Lewko et Radziwiłł en 2017 pour préciser ce résultat dans le cas particulier considéré par Gál. Dans un travail récent, accepté pour publication aux *Proceedings of the London Mathematical Society*, Régis de la Bretèche [1] et Gérald Tenenbaum [2] parviennent à déterminer l'ordre de grandeur précis de ces sommes dans un autre cas particulier. Ils en déduisent de remarquables applications, portant notamment sur les grandes valeurs de la fonction zêta de Riemann sur l'axe critique.

1. Professeur à l'université Paris-Diderot, affecté à l'IMJ-PRG, CNRS, Sorbonne Université & université Paris-Diderot

2. Professeur à l'université de Lorraine, affecté à l'IECL, CNRS & université de Lorraine

Sommes de Gál et applications

Régis de la Bretèche & Gérald Tenenbaum

20 décembre 2018

Soit $\mathcal{M}$ une partie finie de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des nombres entiers positifs. Les sommes de Gál sont, à l'origine, des expressions du type

$$S_\alpha(\mathcal{M}) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \frac{(m,n)^\alpha}{[m,n]^\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{1}$$

où (m,n) et $[m,n]$ désignent respectivement le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun de m et n. On considère également les formes quadratiques associées

$$S_\alpha(\boldsymbol{c};\mathcal{M}) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \frac{(m,n)^\alpha}{[m,n]^\alpha} c_m\overline{c_n} \qquad (\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{|\mathcal{M}|}). \tag{2}$$

À la suite d'une conjecture de Koksma datant des années 1930, Erdős a proposé en 1947 à la Société mathématique d'Amsterdam de décerner un prix pour l'estimation [1]

$$\Gamma_1(N) := \sup_{|\mathcal{M}|=N} S_1(\mathcal{M})/N \ll (\log_2 N)^2.$$

Ce résultat a été obtenu par Gál [9] en 1949. Plus récemment, Lewko et Radziwiłł [13] ont établi la formule asymptotique

$$\Gamma_1(N) \sim \frac{6\mathrm{e}^{2\gamma}}{\pi^2}(\log_2 N)^2 \qquad (N \to \infty),$$

où γ désigne la constante d'Euler.

1. Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Les estimations uniformes de cette nature ont des implications dans les problèmes de répartition modulo 1 de suites du type $\{n_k\alpha\}_{k=1}^{\infty}$ pour presque tout α. Ainsi, notant

$$B(x) = \begin{cases} \langle x\rangle - \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

où $\langle x\rangle$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel x, il découle de l'identité de Franel

$$\int_0^1 B(ax)B(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{(a,b)}{12[a,b]} \qquad (a,b \in \mathbb{N}^*),$$

que, pour toute partie finie $\mathcal{M}$ de $\mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_0^1 \Big|\sum_{m\in\mathcal{M}} c_m B(mx)\Big|^2 \mathrm{d}x = \tfrac{1}{12} S_1(\boldsymbol{c};\mathcal{M}).$$

De nombreux travaux récents [1], [3], [4], [5], [13] se rapportent au comportement asymptotique des quantités

$$\Gamma_\alpha(N) \coloneqq \frac{1}{N}\sup_{|\mathcal{M}|=N} S_\alpha(\mathcal{M}), \qquad Q_\alpha(N) \coloneqq \sup_{|\mathcal{M}|=N}\ \sup_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N \\ \|\boldsymbol{c}\|_2=1}} |S_\alpha(\boldsymbol{c};\mathcal{M})|.$$

En effet, les sommes de Gál et les formes quadratiques associées apparaissent naturellement dans certains développements de la méthode de résonance. Nous décrivons ci-dessous un exemple emblématique relatif à la minoration d'une classe de polynômes de Dirichlet.

Considérons l'expression $Z(t) \coloneqq \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n n^{-it}$, où les a_n sont positifs ou nuls. Introduisons un facteur de résonance sous la forme

$$R(t) = \sum_{h\in\mathcal{M}} r_h h^{-it}$$

où $|\mathcal{M}| < \infty$, $r_h \geqslant 0$, supposons de plus que

$$\min_{j,h\in\mathcal{M},\, k\neq h} |\log(j/h)| \geqslant 1/T \tag{3}$$

et imposons la condition de normalisation

$$\sum_{h\in\mathcal{M}} r_h^2 = 1. \tag{4}$$

Posant

$$w(t) := \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin(t/2T)}{t/2T}\right)^2, \quad \widehat{w}(y) := \int_{\mathbb{R}} w(t)\mathrm{e}^{-ity}\,\mathrm{d}t = \big(1-|Ty|\big)^+,$$

nous observons d'abord que

$$\int_{\mathbb{R}} |R(t)|^2 w(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ensuite, nous écrivons

$$\int_{\mathbb{R}} |Z(t)R(t)|^2 w(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m,n,j,h} a_m a_n r_j r_h \widehat{w}\Big(\log\frac{nj}{mh}\Big). \tag{5}$$

D'après la majoration de Montgomery-Wirsing (cf., par exemple, [16], lemme III.4.10), nous avons, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$

$$\int_{(2k-1)T}^{(2k+1)T} |Z(t)R(t)|^2 w(t)\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{T(1+k^2)}\int_{-T}^{T} |Z(t)R(t)|^2\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{1+k^2}\max_{|t|\leqslant T}|Z(t)|^2.$$

La même majoration vaut pour $k=0$ puisque

$$\int_{-T}^{T} |Z(t)R(t)|^2 w(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \max_{|t|\leqslant T}|Z(t)|^2 \int_{\mathbb{R}} |R(t)|^2 w(t)\,\mathrm{d}t = \max_{|t|\leqslant T}|Z(t)|^2.$$

En restreignant le membre de droite de (5) aux couples d'indices de la forme $(m,n) = (j/(j,h), h/(j,h))$, nous obtenons donc

$$\sup_{|t|\leqslant T}|Z(t)|^2 \gg \sum_{j,h\in\mathcal{M}} r_j r_h a_{j/(j,h)} a_{h/(j,h)}.$$

Si $a_n \gg 1/n^\alpha$, il suit

$$\max_{|t|\leqslant T}|Z(t)|^2 \gg \sum_{j,h\in\mathcal{M}} r_j r_h \frac{(j,h)^\alpha}{[j,h]^\alpha}.$$

Lorsque les poids r_h sont constants, le minorant est une somme de Gál $S_\alpha(\mathcal{M})$. L'insertion de poids variables permet de traiter le cas où l'ensemble $\mathcal{M}$ optimal ne satisfait pas (3).

Dans le travail [8], nous nous sommes principalement intéressés au cas $\alpha = \frac{1}{2}$, qui est notamment lié à l'étude des grandes valeurs de la fonction zêta de Riemann sur la droite critique.

Posons

$$\mathscr{L}(x) := \exp\left\{\sqrt{\frac{\log x \log_3 x}{\log_2 x}}\right\} \qquad (x > 16).$$

Bondarenko et Seip [4] ont établi l'existence d'une constante $A > 0$ telle que l'on ait

$$\Gamma_{1/2}(N) \leqslant \mathscr{L}(N)^A \qquad (N > N_0(A)). \tag{6}$$

Ils indiquent également que $A = 7$ est admissible alors que $A < 1$ ne l'est pas.

Une nouvelle approche nous permet de préciser ces résultats.

Théorème 1 ([8])**.** *Lorsque N tend vers l'infini, nous avons*

$$\Gamma_{1/2}(N) = \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}, \qquad Q_{1/2}(N) = \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}. \tag{7}$$

Trois conséquences spectaculaires découlent de cette estimation.

La première concerne, ainsi qu'annoncé plus haut, la fonction zêta de Riemann et plus précisément l'obtention de bornes inférieures pour la quantité

$$Z_\beta(T) := \max_{T^\beta \leqslant \tau \leqslant T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2} + i\tau)\right| \qquad (0 \leqslant \beta < 1,\ T \geqslant 1). \tag{8}$$

Elle se situe dans le prolongement des travaux de Montgomery [14], Balasubramanian–Ramachandra [2], et Bondarenko–Seip [5], [7], [6]. La méthode de résonance a été développée indépendamment, dans ce cadre, par Soundararajan [15] et Hilberdink [11]. C'est la voie suivie par Bondarenko et Seip [5].

En revisitant la méthode de [5], nous pouvons déduire du Théorème 1 le résultat suivant.

Théorème 2. *Soient β et c des nombres réels vérifiant $0 \leqslant \beta < 1$ et $0 < c < \sqrt{2(1-\beta)}$. Lorsque T est suffisamment grand, nous avons*

$$Z_\beta(T) \geqslant \mathscr{L}(T)^c.$$

La seconde application porte sur les grandes valeurs des fonctions L associées aux caractères de Dirichlet χ, soit

$$L(s,\chi) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (\sigma := \Re(s) > 1).$$

Notons $X_q^+ \coloneqq \{\chi \pmod q : \chi(-1) = 1\}$. Le Théorème 1 peut être combiné à la méthode de résonance pour obtenir une minoration des quantités

$$L_q^+ \coloneqq \max_{\substack{\chi \in X_q^+ \\ \chi \neq \chi_0}} \big|L(\tfrac12, \chi)\big| \qquad (q \geqslant 3),$$

où χ_0 désigne le caractère principal modulo q. Nous nous limitons ici au cas où q est un nombre premier.

Théorème 3. *Lorsque le nombre premier q tend vers l'infini, nous avons*

$$L_q^+ \geqslant \mathscr{L}(q)^{1+o(1)}.$$

Des estimations de même nature ont été abondamment considérée dans la littérature, notamment dans [15]. Nos résultats permettent d'améliorer la minoration de $\log L_q^+$ d'un facteur de l'ordre de $\sqrt{\log_3 q}$.

La troisième application concerne les grandes valeurs des sommes partielles de caractères, soit

$$S(x, \chi) \coloneqq \sum_{n \leqslant x} \chi(n)$$

où χ est caractère de Dirichlet.

Améliorant des estimations de [10], Hough [12] a établi une minoration de la quantité

$$\Delta(x, q) \coloneqq \max_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi \pmod q}} |S(x, \chi)|,$$

lorsque q est un nombre premier. Notant $x = q^\vartheta$, cette estimation est valide dans le domaine

$$4\sqrt{\frac{\log_2 q}{\log q}} \log_3 q \leqslant \vartheta \leqslant 1 - 4\sqrt{\frac{\log_2 q}{\log q}} \log_3 q. \tag{9}$$

Le résultat suivant, valable sans restriction sur le module q, découle rapidement du Théorème 1. Dans son domaine de validité, il améliore l'estimation de Hough pour $\log \Delta(x, q)$ d'un facteur $\sqrt{2 \log_3(q/x)}$. Nous notons $\omega(q)$ le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier q.

Théorème 4. *Soit $\varepsilon > 0$. Sous la condition $\mathrm{e}^{(\log q)^{1/2+\varepsilon}} \leqslant x \leqslant q/\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\omega(q)}$, nous avons*

$$\Delta(x, q) \gg \sqrt{x}\,\mathscr{L}(q/x)^{\sqrt{2}+o(1)} \qquad (q \to \infty). \tag{10}$$

Références

[1] Christoph Aistleitner, István Berkes, and Kristian Seip. GCD sums from Poisson integrals and systems of dilated functions. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(6) :1517–1546, 2015.

[2] Ramachandran Balasubramanian and Kanakanahalli Ramachandra, On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$. III. *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A*, 86(4) :341–351, 1977.

[3] Andriy Bondarenko, Titus Hilberdink, and Kristian Seip. Gál-type GCD sums beyond the critical line. *J. Number Theory*, 166 :93–104, 2016.

[4] Andriy Bondarenko and Kristian Seip. GCD sums and complete sets of square-free numbers. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(1) :29–41, 2015.

[5] Andriy Bondarenko and Kristian Seip. Large greatest common divisor sums and extreme values of the Riemann zeta function. *Duke Math. J.*, 166(9) :1685–1701, 2017.

[6] Andriy Bondarenko and Kristian Seip. Extreme values of the Riemann zeta function and its argument. *Math. Ann.*, 372(3-4) :999–1015, 2018.

[7] Andriy Bondarenko and Kristian Seip. Note on the resonance method for the Riemann zeta function. In *50 years with Hardy spaces*, volume 261 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 121–139. Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

[8] Régis de la Bretèche et Gérald Tenenbaum. Sommes de Gál et applications. *Proceedings of the London Mathematical Society*. À paraître. `https://arxiv.org/pdf/1804.01629.pdf`.

[9] István Sándor Gál. A theorem concerning Diophantine approximations. *Nieuw Arch. Wiskunde (2)*, 23 :13–38, 1949.

[10] Andrew Granville and Kannan Soundararajan. Large character sums. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2) :365–397, 2001.

[11] Titus Hilberdink. An arithmetical mapping and applications to Ω-results for the Riemann zeta function. *Acta Arith.*, 139(4) :341–367, 2009.

[12] Bob Hough. The resonance method for large character sums. *Mathematika*, 59(1) :87–118, 2013.

[13] Mark Lewko and Maksym Radziwiłł. Refinements of Gál's theorem and applications. *Adv. Math.*, 305 :280–297, 2017.

[14] Hugh L. Montgomery. Extreme values of the Riemann zeta function. *Comment. Math. Helv.*, 52(4) :511–518, 1977.

[15] Kannan Soundararajan. Extreme values of zeta and L-functions. *Math. Ann.*, 342(2) :467–486, 2008.

[16] Gérald Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, coll. *Échelles*. Belin, quatrième édition, 2015.