MARCHES DANS DES RÉSEAUX, THÉORIE DE GALOIS ET COURBES ELLIPTIQUES

L'étude de marches discrètes à valeurs dans un réseau est un sujet classique en combinatoire énumérative. Ces objets étant en bijection avec de nombreuses classes discrètes (arbres, tableaux de Young, cartes), leur énumération a de nombreuses retombées. Mais les marches discrètes apparaissent aussi de façon naturelle en probabilités en tant que marches aléatoires, en physique, en informatique comme solution de problèmes d'optimisation discrète ou bien encore en cristallographie.

Étant donné un réseau discret, par exemple $\mathbb{Z}^r$, et un ensemble de pas dans ce réseau $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^r$, on s'intéresse au nombre $q_{(P,n)}$ de marches de longueur n à pas dans $\mathcal{D}$, confinées à un certain sous-domaine $\mathcal{A}$ du réseau, partant de l'origine pour aboutir au point P de $\mathcal{A}$. La figure 1 donne un exemple de marche à pas $\mathcal{D} = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow, \swarrow\}$ de longueur 45 confinée dans le premier quadrant.

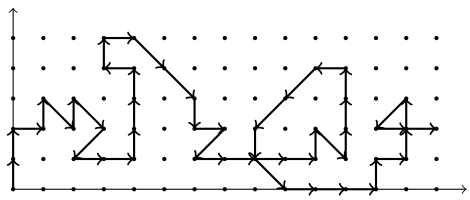


FIGURE 1. Marche à pas $\{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow, \swarrow\}$

La complexité de la suite énumérative $(q_{P,n})_{n\in\mathbb{N}}$ se reflète dans la nature algébrique de la série génératrice. Par exemple, une série génératrice holonome, c'est-à-dire satisfaisant à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels correspond à une suite énumérative satisfaisant à des relations de récurrence linéaires. Si le domaine de confinement $\mathcal{A}$ a une géométrie trop élémentaire, par exemple un demi espace borné par un hyperplan rationnel, la complexité énumérative est simple. En effet, le problème est unidimensionnel, c'est-à-dire se ramène à celui d'une marche sur une demi-droite et la série génératrice associée s'avère algébrique (voir par exemple [BF02]). La nature des marches, dont le domaine de confinement est restreint à un cône d'ouverture inférieure à π, s'avère beaucoup plus surprenante. Parmi les 256 marches confinées au premier quadrant dont l'ensemble de directions est un sous-ensemble des huit directions cardinales, Bousquet-Mélou et Mishna démontrent dans [BMM10] par des arguments de symétrie et en retirant des problèmes unidimensionnels que seuls 79 cas persistent. La figure 2 ordonne ces 79 ensembles de directions selon la complexité algébrique de la série génératrice $Q(x, y, t)$ associée. On y dénombre

— 3 *cas algébrique :* la série $Q(x, y, t)$ satisfait à une relation polynomiale non triviale à coefficients dans $\mathbb{Q}(x, y, t)$.

— 16 *cas holonomes :* la série $Q(x, y, t)$ est transcendante et holonome.

— 9 *cas x-y-t-différentiellement algébriques :* la série $Q(x, y, t)$ est non holonome mais satisfait à une équation différentielle polynomiale à coefficients rationnels en chacune des trois variables.

— 47 *cas x-y-différentiellement transcendants :* la série n'est pas différentiellement algébrique.

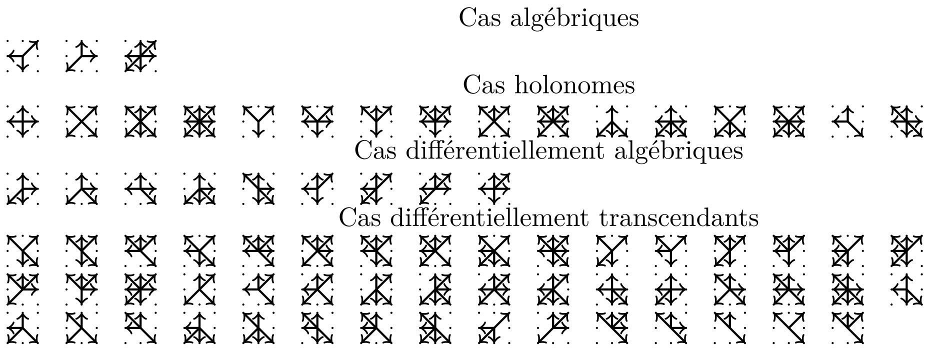


FIGURE 2. Classification des 79 marches à petits pas dans le premier quadrant.

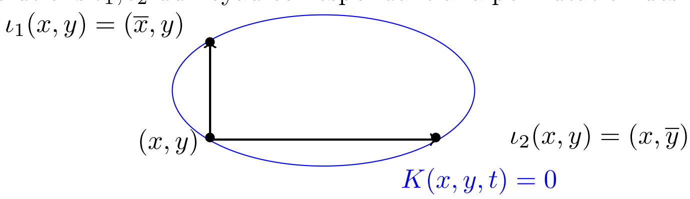
Cette classification résume une décennie de recherche qui aura vu les efforts conjugués de plusieurs communautés. En effet, on y trouve des approches probabilistes, d'autres liées au calcul formel et aux méthodes de *Guess and Proof*, des classifications combinatoires, des méthodes analytiques via la résolution de problèmes aux limites et plus récemment des méthodes de théorie de Galois des équations fonctionnelles et de géométrie algébrique. Au cœur de toutes ces stratégies se situe l'équation fonctionnelle satisfaite par la série génératrice $Q(x,y,t)=\sum_{i,j,t} q_{(i,j),n}x^iy^jt^n$. Cette équation est de la forme suivante

$$K(x,y,t)Q(x,y,t)=xy+K(x,0,t)Q(x,0,t)+K(0,y,t)Q(0,y,t)+K(0,0,t)Q(0,0,t), \tag{1}$$

où $K(x,y,t)$ est un polynôme biquadratique en x et y appelé *noyau* de la forme

$$K(x,y,t)=xy-t\sum_{(i,j)\in\{-1,0,1,\}^2} d_{i,j}x^{i+1}y^{j+1},$$

avec $d_{i,j}$ un poids sur la direction (i,j). L'équation (1) s'obtient par récurrence sur la longueur n de la marche et on y voit apparaître les termes de bords $K(x,0,t)Q(x,0,t)$ et $K(0,y,t)Q(0,y,t)$ correspondant au confinement de la marche dans le premier quadrant. Une telle équation fait partie de la classe des équations dites *à noyau* en combinatoire. La méthode du noyau, embryonnaire dans le livre de Knuth (cf. [Knu97, Exercice 2.2.1.-4]), est enrichie et formalisée dans [BBMD+02] pour des séries en une variable. Cette méthode consiste à exploiter les symétries de l'équation du noyau et la géométrie de son lieu d'annulation afin d'obtenir des formes closes ou de nouvelles équations fonctionnelles pour les séries génératrices. Dans [BMM10], Bousquet-Mélou et Mishna attachent à toute marche sa *courbe du noyau*, la courbe algébrique définie comme lieu des zéros (x,y) dans le produit des droites projectives $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ du polynôme $K(x,y,t)$ ainsi qu' un groupe d'automorphismes de cette courbe, *le groupe de la marche*. Ce groupe est engendré par les deux involutions ι_1,ι_2 du noyau correspondant à la permutation des racines en x ou en y.



Bousquet-Mélou et Mishna conjecturent alors que le groupe de la marche est fini si et seulement si la série génératrice est holonome. Elles démontrent cette conjecture pour 22 des 23 cas de groupe fini en utilisant une description de la série sous la forme de trace sous l'action du groupe de la marche. Le dernier cas, nommé la marche de Gessel est résolu par Bostan, van Hoeij et Kauers dans [BvHK10] en devinant grâce au calcul symbolique la forme d'une équation algébrique satisfaite par la série, étape de *Guess*, et en certifiant cette dernière équation mathématiquement, étape de *Proof*.

Parmi les 56 marches de groupe infini, 51 correspondent à une courbe du noyau elliptique et 5 à une courbe du noyau de genre nul. Inspirés par la stratégie analytique d'étude des processus stationnaires de [FIM99], Kurkova et Raschel proposent la première approche systématique du problème dans le cas d'un groupe infini et d'une courbe de genre 1 (voir [KR12]). Ils spécialisent l'équation fonctionnelle (1) sur le lieu des zéros en (x, y) du noyau afin de faire disparaître l'instance trivariée de la série génératrice et de ne travailler qu'avec les termes de bord. En utilisant un paramétrage transcendant de la courbe du noyau par des fonctions de Weierstrass, ils uniformisent la série génératrice en une fonction méromorphe qui satisfait à une équation fonctionnelle linéaire simple dont la dynamique est induite par le groupe de la marche. Ce prolongement analytique délicat leur permet de produire une orbite infinie de singularités de la série en utilisant l'action du groupe de la marche et de démontrer la non holonomie de la série génératrice pour ces 51 cas. Melczer et Mishna emploient une stratégie semblable appelée *iterated Kernel method* pour les 5 cas de genre zéro et complètent la preuve de la conjecture de [BMM10].

L'étude de l'algébricité différentielle est cependant hors d'atteinte de ces méthodes analytiques. La classe des fonctions différentielles algébriques est très sauvage et le nombre de singularités n'est plus un critère discriminant. En effet, parmi les fonctions différentielles algébriques on trouve la fonction de comptage des partitions d'entiers possédant un nombre infini de singularités et la fonction zêta de Riemann, qui n'a qu'un seul pôle. Afin de remédier à l'absence de critères analytiques, les travaux [DHRS18, DHRS17] combinent théorie de Galois des équations aux différences et géométrie algébrique. La théorie de Galois des équations aux différences encode les relations algébriques entre solutions d'une équation linéaire discrète dans un groupe linéaire algébrique, le *groupe de Galois de l'équation*. Par correspondance galoisienne, les équations de définition du groupe de Galois en tant que variété algébrique reflètent les relations entre les solutions. Dans le cas des marches dans le premier quadrant associées à un noyau de genre 1, on déduit de (1) que la restriction de la série génératrice à la courbe du noyau satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$Y(X \oplus \Omega) - Y(X) = b(X) \tag{2}$$

où $b(X)$ est une fonction rationnelle sur le noyau, Ω un point fixe du noyau et $\oplus$ la loi d'addition du noyau en tant que courbe elliptique. Dans ce formalisme, on démontre que le groupe de la marche est fini si et seulement si le point Ω est de torsion. En considérant la dérivation canonique δ sur le noyau, on peut dériver de façon successive (2). Comme δ commute avec l'addition par Ω, on déduit que la dérivée i-ème de la série génératrice satisfait à une équation de la forme

$$Y_i(X \oplus \Omega) - Y_i(X) = \delta^i(b(X)). \tag{3}$$

Dans le cas d'un groupe infini, la forme des équations (3) impose une forte contrainte à leur groupe de Galois. La théorie de Galois aux différences formalise alors la preuve originelle de la transcendance différentielle de la fonction Γ due à Hölder et permet de faire de l'élimination au niveau des relations différentielles algébriques satisfaites par la série génératrice. On montre ainsi que si la série génératrice est différentielle algébrique alors elle satisfait à une équation différentielle à coefficients constants non homogène dont le second membre est une fonction elliptique. Dans ce cas, il existe des constantes complexes non nulles $c_0, \ldots, c_n$ et une fonction rationnelle sur le noyau g telles que

$$c_0 b(X) + \cdots + c_n \delta^n(b(X)) = g(X+\Omega) - g(X). \tag{4}$$

L'existence d'une telle équation, appelée *télescopeur* en analogie avec les problèmes de télescopage créatif initiés par Zeilberger (cf. [Zei90]) est conditionnée par la position relative des orbites des pôles de la fonction b sous l'action de la dynamique induite par l'addition de Ω. Les pôles de b étant des point rationnels du noyau, c'est-à-dire définis sur le corps de base de l'équation, cette dernière question se traduit en l'étude du sous-réseau formé par ces points dans le groupe de Mordell-Weil de la courbe du noyau. Dans [DHRS18], on montre ainsi que pour toutes les marches de genre 1 sauf 9, il n'existe aucun télescopeur ce qui permet de conclure à la transcendance différentielle des séries génératrices associées. Pour les 9 cas restants, l'existence d'un télescopeur permet de conclure à l'algébricité différentielle sans toutefois donner une forme entièrement explicite à la relation satisfaite par la série. Un raisonnement galoisien similaire donne la transcendance différentielle de toutes les séries associées à des courbes de genre zéro (voir [DHRS17]). Indépendamment, Bernardi, Bousquet-Mélou et Raschel développent une stratégie basée sur la notion d'invariants de Tutte qui leur permet de donner une forme close à la série génératrice et d'expliciter les équations différentielles polynomiales satisfaites par les 9 séries différentielles algébriques rattachées à des courbes de genre 1 (cf dans [BBMR16, BBMR]).

Ainsi, se dessine une stratégie d'étude de la combinatoire des marches sur les réseaux qui combine classification combinatoire, invariants analytiques et théorie de Galois aux différences. Cette dernière permet de ramener l'étude des relations différentielles algébriques satisfaites par les séries génératrices à l'étude de l'action d'une dynamique algébrique sur des points rationnels d'une variété algébrique. Ce problème de nature purement arithmétique est déjà implémenté en machine et met en jeu le calcul de hauteurs de points des surfaces elliptiques via la théorie de l'intersection (voir [Sil94]). On obtient donc une approche systématique des équations à noyaux qui semble très prometteuse pour attaquer la combinatoire des marches à grands pas ou encore celle des marches tridimensionnelles confinées à l'octant positif.

Références

[BBMD+02] Cyril Banderier, Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Dominique Gouyou-Beauchamps. Generating functions for generating trees. *Discrete Math.*, 246(1-3), 2002. Formal power series and algebraic combinatorics (Barcelona, 1999).

[BBMR] Olivier Bernardi, Mireille Bousquet-Mélou, and Kilian Raschel. Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. Full version of the FPSAC 2016 extended abstract.

[BBMR16] Olivier Bernardi, Mireille Bousquet-Mélou, and Kilian Raschel. Counting quadrant walks via Tutte's invariant method. *Proceedings of FPSAC 2016*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., 2016.

[BF02] Cyril Banderier and Philippe Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 281(1-2) :37–80, 2002. Selected papers in honour of Maurice Nivat.

[BMM10] Mireille Bousquet-Mélou and Marni Mishna. Walks with small steps in the quarter plane. In *Algorithmic probability and combinatorics*, volume 520 of *Contemp. Math.*, pages 1–39. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[BvHK10] Alin Bostan, Mark van Hoeij, and Manuel Kauers. The complete generating function for Gessel walks is algebraic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(9) :3063–3078, 2010.

[DHRS17] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques, and Michael F Singer. Walks in the quarter plane, genus zero case. *arXiv preprint arXiv :1710.02848*, 2017.

[DHRS18] Thomas Dreyfus, Charlotte Hardouin, Julien Roques, and Michael F Singer. On the nature of the generating series of walks in the quarter plane. *Inventiones mathematicae*, 213(1) :139–203, 2018.

[FIM99] Guy Fayolle, Roudolf Iasnogorodski, and Vadim Malyshev. *Random walks in the quarter-plane*, volume 40 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Algebraic methods, boundary value problems and applications.

[Knu97] Donald E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 1.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1997. Fundamental algorithms, Third edition [of MR0286317].

[KR12] Irina Kurkova and Kilian Raschel. On the functions counting walks with small steps in the quarter plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 116 :69–114, 2012.

[Sil94] Joseph H. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, volume 151 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Zei90] Doron Zeilberger. A fast algorithm for proving terminating hypergeometric identities. *Discrete Math.*, 80(2), 1990.