

SUR L'HYPERBOLICITÉ DE GRAPHES ASSOCIÉS AU GROUPE DE CREMONA

ANNE LONJOU

Classifier les objets auxquels on s'intéresse est un problème qui apparaît dans toutes les branches des mathématiques. En géométrie algébrique, les objets que l'on souhaite classifier sont les variétés algébriques. Cependant, les classifier à isomorphismes près est trop compliqué car il existe trop de classes différentes. Ainsi la bonne notion est de les classifier à transformations birationnelles près. Plus précisément, une application birationnelle est un isomorphisme entre deux ouverts denses pour la topologie de Zariski.

Si la variété algébrique X considérée est fixée, les transformations birationnelles de X dans X forment un groupe. Ces groupes diffèrent énormément suivant la variété X . Un des plus riches et des plus intéressants est lorsque l'on considère l'espace projectif de dimension n . Dans ce cas, ce groupe est appelé « groupe de Cremona » de rang n . Le groupe de Cremona de rang 2 a été introduit par L. Cremona en 1865 [?] même si certaines transformations avaient déjà été étudiées depuis l'antiquité comme par exemple l'inversion du cercle. De nombreux aspects de ce groupe ont été étudiés, comme par exemple, ses aspects dynamiques, ses aspects topologiques, ou encore ses propriétés de groupe (voir par exemple le survol de S. Cantat [?]).

Exemple. Voici un exemple classique d'élément du groupe de Cremona de rang 2 :

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] & \mapsto & [yz : xz : xy] \end{array} ,$$

qui est parfois appelée « involution quadratique de Cremona ». C'est un automorphisme de $\mathbb{P}^2 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\})$.

Un outil clé pour étudier ce groupe est son action sur un espace hyperbolique de dimension infinie \mathbb{H}^∞ (nappe d'hyperboloïde d'une forme quadratique de signature $(1, \infty)$ vivant dans \mathbb{R}^∞ , à base non dénombrable ; voir Figure 1 pour un analogue en

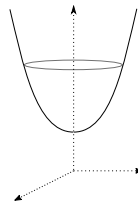


Figure 1. Modèle de l'hyperboloïde (ou de Minkowski) du plan hyperbolique donné par : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 1 \text{ et } x > 0\}$.

dimension 2). Cette action a de nombreuses similarités avec l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur le plan hyperbolique. Le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ étant un produit amalgamé, il agit sur son arbre de Bass-Serre. Cet arbre apparait dans le bord d'un pavage du plan hyperbolique (modèle du demi-plan de Poincaré) obtenu en considérant l'orbite d'un domaine fondamental de cette action (voir Figure 2). Rappelons que le demi-plan de Poincaré est la partie du plan complexe dont les éléments ont une partie réelle strictement positive.

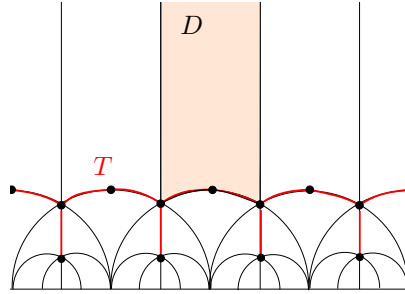


Figure 2. Arbre T de Bass-Serre dans le demi-plan de Poincaré pavé par l'orbite d'un domaine fondamental D .

Un espace métrique géodésique (X, d) est dit hyperbolique au sens de Gromov si tous ses triangles géodésiques sont uniformément fins (voir la figure 3) : il existe $\delta \geq 0$ tels pour tous $x_1, x_2, x_3 \in X$ et pour tous choix de géodésiques $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ et $[x_3, x_1]$ le δ -voisinage de l'union de deux géodésiques contient la troisième. Par exemple, les arbres sont hyperboliques au sens de Gromov (tous les triangles d'un arbre sont 0-fins), mais \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne n'est pas hyperbolique au sens de Gromov.

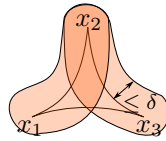


Figure 3. Triangle δ -fin.

Les graphes hyperboliques au sens de Gromov sont des généralisations des arbres et sont des espaces très utilisés en théorie géométrique des groupes. Notamment des résultats de petites simplifications existent pour des groupes agissant sur des espaces hyperboliques au sens de Gromov. En poursuivant l'analogie avec $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, il est naturel de se demander s'il existe un graphe sur lequel le groupe de Cremona agit par isométries et de façon non triviale qui pourrait-être l'analogie de l'arbre de Bass-Serre. Ceci est l'objet de l'article [?]. À noter que le groupe de Cremona sur \mathbb{C} n'étant pas un produit amalgamé, il n'agit pas sur un arbre.

Dans un précédent article [?], un pavage de Voronoï associé à l'action du groupe de Cremona sur \mathbb{H}^∞ a été construit. Ce pavage permet de déterminer un domaine

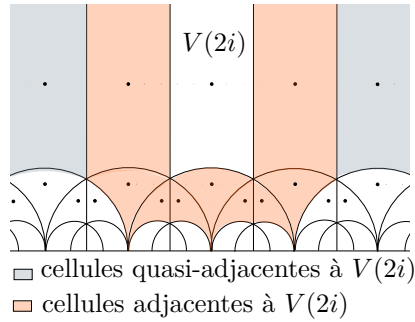


Figure 4. Pavage de Voronoï associé à l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur $2i$.

fondamental pour l'action du groupe de Cremona sur \mathbb{H}^∞ (à automorphismes du plan projectif près). Le pavage de Voronoï permet de découper un espace métrique en cellules d'influences. Plus précisément, en considérant un groupe G agissant discrètement par isométries sur un espace métrique (X, d) , on associe à chaque point d'une orbite fixée une cellule de la façon suivante. Soit \mathcal{O} l'orbite d'un point de X . Pour tout $o \in \mathcal{O}$, on associe la cellule de Voronoï :

$$\mathcal{V}(o) := \{x \in X \mid d(x, o) \leq d(x, go) \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Lorsque le stabilisateur d'un point de l'orbite est trivial, cela donne un domaine fondamental. Par exemple, si l'on considère la cellule de Voronoï associée au point $2i$ dans \mathbb{H}^2 pour l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, on retrouve un domaine fondamental classique (voir la figure 4). Dans le cas de l'action du groupe de Cremona sur \mathbb{H}^∞ , le stabilisateur des points de l'orbite considérée est isomorphe à $\text{PGL}(3, \mathbb{C})$ (qui correspond au sous-groupe des isomorphismes du groupe de Cremona) ce qui explique que l'on n'obtienne pas exactement un domaine fondamental.

Dans [?], la géométrie de ce pavage a été également étudiée. Plus précisément, étant donnée une cellule fixée, on a caractérisé les cellules qui ont un point commun avec la cellule fixée, appelées « cellules adjacentes » ; ainsi que les cellules qui partagent un point commun à l'infini avec la cellule fixée, appelées « cellules quasi-adjacentes » (voir la figure 4). Dans le cas du pavage associé au groupe de Cremona, une cellule fixée possède un nombre infini de cellules adjacentes et un nombre infini de cellules quasi-adjacentes.

Deux graphes naturels apparaissent ainsi comme duaux à ce pavage : « le graphe d'adjacence » et le « graphe de quasi-adjacence ». Les sommets de ces deux graphes sont les points de l'orbite (appelés « germes » des cellules de Voronoï) et une arête relie deux sommets du graphe d'adjacence, respectivement de quasi-adjacence, si les sommets correspondent à deux cellules qui sont adjacentes, respectivement quasi-adjacentes (voir les figures 5 et 6). Contrairement au cas de l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ sur $2i$, le graphe de quasi-adjacence associé à l'action du groupe de Cremona sur \mathbb{H}^∞ est connexe. En fait, dans ce cas-là, toute cellule adjacente à une cellule donnée lui est quasi-adjacente. Par conséquent, la bonne analogie du graphe de quasi-adjacence associé au groupe de Cremona serait de faire l'union des deux graphes des figures 5 et 6. En faisant cela, on voit que les cellules associées aux translatés de $2i$ ($2i + k$) deviennent toutes à distance un dans le graphe de quasi-adjacence alors que dans

le graphe d'adjacence, il est toujours possible d'en trouver deux à distance aussi grande que l'on souhaite.

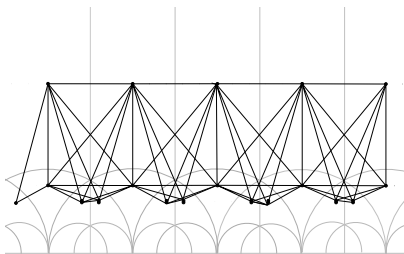


Figure 5. Graphe d'adjacence associé à $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

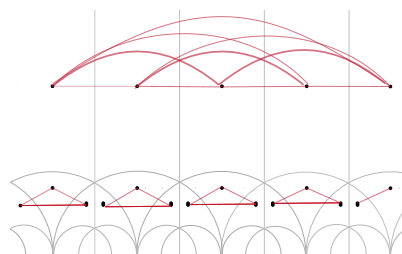


Figure 6. Graphe de quasi-adjacence associé à $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Dans notre quête de trouver un analogue à l'arbre de Bass-Serre, on a étudié dans [?] ces graphes et on a montré qu'ils étaient tous les deux de diamètre infinis. Ils correspondent également à deux graphes de Cayley du groupe de Cremona pour deux systèmes de générateurs particuliers (les générateurs associés au graphe d'adjacence font partie des générateurs associés au graphe de quasi-adjacence). On montre aussi que le graphe d'adjacence est quasi-isométrique (isométrique à dilatation uniformément bornée près et à translation uniformément bornée près) à un graphe introduit par D. Wright [?]. Dans [?], A. Minasyan et D. Osin demandent si le graphe de Wright est hyperbolique au sens de Gromov. Par conséquent, l'hyperbolicité étant une propriété stable par quasi-isométrie, un candidat à être analogue à l'arbre de Bass-Serre est le graphe d'adjacence. Cependant, il s'avère que ce n'est pas le cas, mais que le bon candidat est plutôt le graphe de quasi-adjacence.

Théorème ([?]). *Le graphe d'adjacence n'est pas hyperbolique au sens de Gromov, par contre le graphe de quasi-adjacence est hyperbolique au sens de Gromov.*

En fait, le graphe d'adjacence contient des sous-graphes quasi-isométriques au graphe de Cayley classique de \mathbb{Z}^2 , l'empêchant d'être hyperbolique au sens de Gromov. Cependant ce phénomène disparaît dans le graphe de quasi-adjacence puisque tous les sommets correspondant à un de ces graphes de Cayley de \mathbb{Z}^2 dans le graphe d'adjacence, sont reliés par une arête dans le graphe de quasi-adjacence et forment donc un sous-graphe borné.

Si l'on retranscrit ça au niveau du groupe, les sous-groupes isomorphes à \mathbb{Z}^2 dans le groupe de Cremona qui posent problème pour l'hyperbolicité du graphe d'adjacence, deviennent des générateurs dans le graphe de Cayley correspondant au graphe de quasi-adjacence.