SUR LES REPRÉSENT TIONS MODUL IRES EN C R CTÉRISTIQUE p DE $\mathrm{GL}_2(K)$

par

Christophe Breuil, Stefano Morra & Benjamin Schraen

Résumé. — Pour p un nombre premier nous présentons quelques progrès récents obtenus en collaboration avec Florian Herzig et Yongquan Hu ([**HH$^+$23**], [**HH$^+$**]) sur les représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$, pour K extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}$, portées par le H en caractéristique p d'une tour de courbes de Shimura.

Table des matières

1. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

1.1. Cohomologie des courbes modulaires. — Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire contenant un sous-groupe de la forme

$$\Gamma_N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+aN & bN \\ cN & 1+dN \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \right\}$$

pour un certain entier $N \geqslant 2$. Le quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ par Γ est une surface de Riemann appelée *courbe modulaire*. Ces courbes modulaires sont des objets qui intéressent les géomètres et les théoriciens des nombres depuis très longtemps. Un point particulièrement intéressant est que les courbes modulaires sont définies sur des corps de nombres : une courbe modulaire est en effet l'ensemble des points complexes d'une courbe algébrique donnée par une équation dont les coefficients sont des nombres algébriques. On peut même supposer que ces coefficients sont des nombres rationnels en regroupant ces courbes modulaires en certains paquets finis (convenablement définis) qui sont en fait l'ensemble des points complexes d'une courbe algébrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Précisons-cela en introduisant les adèles.

Les morphismes surjectifs $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n, m entiers > 0 définissent un système projectif dont la limite $\widehat{\mathbb{Z}} \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$, qui est aussi isomorphe au produit $\prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques $\mathbb{Z}_\ell$ pour tous les nombres premiers ℓ. L'anneau $\mathbb{A}_f \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ s'appelle l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$, et on peut en particulier considérer le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Pour chaque sous-groupe ouvert compact $U \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, il existe une unique courbe algébrique affine lisse Y_U sur $\mathbb{Q}$ dont les points complexes sont :

$$Y_U(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \big(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \times (\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/U)\big)$$

où l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ est « diagonale » et se fait sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ via $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et l'action par homographies de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Les $Y_U(\mathbb{C})$ sont alors des unions disjointes finies des courbes modulaires décrites plus haut comme quotients du demi-plan de Poincaré. Leur cohomologie (singulière si on les voit comme surfaces de Riemann ou étale si on les voit comme courbes algébriques) peut se décrire au moyen d'objets arithmétiques. Si leur H^0 (c'est-à-dire leur ensemble de composantes connexes) peut être décrit grâce à la théorie du corps de classe, leur H^1 peut être décrit par la théorie des formes modulaires et les correspondances de Langlands locales.

Précisons cela. Chaque courbe Y_U est une courbe algébrique définie sur $\mathbb{Q}$. Son ensemble de points algébriques $Y_U(\overline{\mathbb{Q}})$ est donc muni d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. La théorie de la cohomologie étale de Grothendieck permet, pour tout nombre premier ℓ, de montrer que le groupe de cohomologie (singulière) $H^1(Y_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell) \cong \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} H^1(Y_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ de $Y_U(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$ dépend fonctoriellement de l'ensemble $Y_U(\overline{\mathbb{Q}})$. Ce $\mathbb{Z}_\ell$-module hérite en particulier d'une action continue et $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Noter qu'il est important de travailler avec des coefficients ℓ-adiques : le sous-groupe $H^1(Y(U), \mathbb{Z})$ n'est pas stable par l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ce qui est lié au fait que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $Y_U(\overline{\mathbb{Q}})$ ne s'étend pas continûment à $Y_U(\mathbb{C})$.

Les diverses courbes $Y_U(\mathbb{C})$ pour U parcourant les sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sont reliées comme suit. Soit $U, V \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ deux sous-groupes ouverts compacts et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ tel que $g^{-1}Vg \subseteq U$, alors la multiplication à droite par g donne un morphisme $Y_V(\mathbb{C}) \to Y_U(\mathbb{C})$. Ce morphisme induit une application entre groupes de cohomologie

$$H^1(Y_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \quad \to H^1(Y_V(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Les morphismes $Y_V(\mathbb{C}) \to Y_U(\mathbb{C})$ proviennent en fait de morphismes de courbes algébriques $Y_V \to Y_U$ définis sur $\mathbb{Q}$, qui induisent encore des applications $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-équivariantes :

$$H^1(Y_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell) \quad \to H^1(Y_V(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell).$$

1.2. Représentations en caractéristique 0 **de** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$**.** — On fixe désormais un nombre premier p et on note ${}^{p}_{f} \overset{\text{déf}}{=} (\prod_{\ell\neq p}\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \subseteq {}_{f}$ (les adèles finis de $\mathbb{Q}$ hors p), de sorte que ${}_{f} = {}^{p}_{f} \times \mathbb{Q}_p$. Pour tout sous-groupe ouvert compact $U^p \subseteq \mathrm{GL}_2({}^{p}_{f})$ et tout nombre premier ℓ, on considère la limite inductive

$$\varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}),\mathbb{Z}_\ell) \tag{1}$$

prise sur les sous-groupes ouverts compacts U_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (de plus en plus petits) et où les applications de transition pour $U'_p \subseteq U_p$ sont induites en prenant $g = 1$ (avec les notations du § 1.1). L'avantage de considérer la limite (1) est qu'en plus de l'action précédente de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (sur chaque espace en (1)), on a cette fois une action naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur la limite inductive qui vient du fait que, pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tout U_p, il existe U'_p suffisamment petit tel que $U'_p \subseteq gU_pg^{\ 1}$. De plus cette action commute à celle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et elle est localement constante (la terminologie consacrée est « lisse »), c'est-à-dire que pour tout x dans (1) l'action de $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur x est l'identité si g est suffisamment proche (p-adiquement) de 1.

Le théorème suivant rassemble des résultats de Deligne, Langlands, Piatetski-Shapiro, Carayol, et T. Saito. On note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Z}_\ell[1/\ell]$.

Théorème 1.2.1. — *On a un isomorphisme de représentations $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-linéaires de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

$$\varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}),\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \ \bigoplus_f \rho(f)\otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\ {}_p(f)^{\oplus d_{U^p}(f)}\Big) \bigoplus\ (*) \tag{2}$$

où la première somme directe est sur les formes modulaires paraboliques f nouvelles de poids 2, dont la partie première à p du niveau est U^p et qui sont vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke (et où $(*)$ est la contribution des formes modulaires non paraboliques, qui ne nous intéresse pas ici).

Il convient de préciser cet énoncé. D'abord, les représentations ne se décomposent bien qu'après extension des scalaires au corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Ensuite une forme modulaire de niveau U^pU_p est aussi de niveau $U^pU'_p$ pour $U'_p \subseteq U_p$, or il ne faut la compter qu'une seule fois dans la somme directe (2), c'est le sens du mot *nouvelles de niveau (premier à p) U^p*. Venons-en aux quantités $\rho(f)$, ${}_p(f)$ et $d_{U^p}(f)$ apparaissant dans l'énoncé. La première $\rho(f) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la *représentation galoisienne ℓ-adique* associée à la forme parabolique propre f, une représentation irréductible de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. La seconde ${}_p(f)$ est une représentation lisse irréductible (de dimension infinie) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, qui a la propriété qu'elle ne dépend que de la restriction $\rho(f)|_{\mathrm{G}\ 1(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ de $\rho(f)$ au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (ce qui n'est absolument pas clair *a priori* puisque la construction de ${}_p(f)$ dans (2) utilise le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, pas $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$). Cette dépendance a pour nom *correspondance de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et son étude (avec celle de ses généralisations à d'autres groupes) est depuis plusieurs décennies au coeur de l'intersection entre théorie des nombres et théorie des représentations. Enfin $d_{U^p}(f) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ est juste une multiplicité qui dépend du niveau (premier à p) U^p fixé.

On peut formuler le Théorème 1.2.1 de manière un peu différente, mais (presque) équivalente, et qui nous conviendra mieux dans les paragraphes suivants :

Coroll ire 1.2.2. — *Soit f une forme modulaire parabolique de poids 2, de niveau (premier à p) U^p et vecteur propre pour les opérateurs de Hecke. On a un isomorphisme de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

$$ {}_p(f)^{\oplus d_{U^p}(f)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\ \rho(f), \varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\Big). $$

1.3. Représentations en caractéristique ℓ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. — L'étude des congruences entre formes modulaires (dont les débuts remontent aux années 70) incite à regarder ce qu'il advient des résultats précédents lorsque l'on remplace $\mathbb{Z}_\ell$ par le corps fini $\mathbb{F}_\ell \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{Z}_\ell/(\ell)$. On a encore une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donnée par

$$ \varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \mathbb{F}_\ell) \qquad (3) $$

qui de plus est la réduction modulo ℓ de (1) car $H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell)/(\ell) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \mathbb{F}_\ell)$ puisque $Y_{U^pU_p}$ est une courbe. De même que, dans les énoncés du § 1.2, on s'est limité aux formes modulaires *paraboliques* f, c'est-à-dire telles que $\rho(f)$ est une représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, il est naturel de se limiter ici aux formes paraboliques f telles que $\rho(f)$ est encore irréductible modulo ℓ, c'est-à-dire possède un réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dont la réduction $\overline{\rho}(f)$ sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de $\mathbb{F}_\ell$ est une représentation irréductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Par analogie avec le Corollaire 1.2.2, on s'intéresse à la représentation lisse $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$ \overline{}(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\ \overline{\rho}(f), \varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_\ell)\Big). \qquad (4) $$

La finitude de la cohomologie d'une surface de Riemann permet de déduire facilement que $\overline{}(f)$ est toujours une représentation *admissible* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, i.e. le sous-espace $\overline{}(f)^{U_p}$ des invariants pour tout sous-groupe ouvert compact U_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie. Mais pour aller plus loin dans l'étude de (4), il convient de distinguer les cas $\ell \neq p$ et $\ell = p$.

Lorsque $\ell \neq p$, la situation est encore, à peu de choses près, analogue à celle du Corollaire 1.2.2. Plus précisément Vignéras et Emerton–Helm ont montré qu'il existe un isomorphisme $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-linéaire $\overline{}(f) \cong \overline{}_p(f)^{\oplus d_{U^p}(f)}$ de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ où $\overline{}_p(f)$ est une représentation (lisse admissible) de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ qui ne dépend que de $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$. Il y a cependant deux différences par rapport au cas de caractéristique 0 : la représentation $\overline{}_p(f)$ est de longueur finie mais n'est pas toujours irréductible (même si elle l'est dans la plupart des cas) et la représentation $\varinjlim H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ n'est plus forcément semi-simple (comme elle était dans le Théorème 1.2.1). Malgré cela, la théorie en caractéristique $\ell \neq p$ n'est pas si compliquée : par exemple la plupart du temps la représentation $\ _p(f)$ du Corollaire 1.2.2 possède un unique réseau à homothétie près stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\overline{}_p(f)$ en est juste sa réduction modulo ℓ.

Suposons maintenant $\ell = p$. On se rend alors compte assez vite que toutes les méthodes du cas $\ell \neq p$ (qui consistent, grossièrement dit, à réduire modulo ℓ les méthodes de la caractéristique 0) se cassent la figure. Par exemple prendre les invariants par un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de représentations lisses admissibles sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ n'est plus un foncteur exact, les représentations $\ _p(f)$ du Théorème 1.2.2 peuvent posséder une infinité de réseaux p-adiques stables à homothétie près, ou bien peuvent posséder des réseaux stables dont la réduction modulo p est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui n'est pas admissible, etc...

Néanmoins, des calculs élémentaires permettent d'obtenir une classification assez simple des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, qu'il vaut la peine de préciser car nous en reparlerons dans le paragraphe suivant. Ces représentations se subdivisent en deux groupes :

— les *sous-quotients de séries principales* ;

— les représentations *supersingulières*.

Les premières peuvent être vues comme des représentations « provenant d'un sous-groupe plus petit », ici le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Plus précisément il s'agit des sous-quotients de représentations induites (lisses) $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi$ où $B(\mathbb{Q}_p) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et χ est un caractère localement constant du sous-groupe des matrices diagonales à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Les secondes, baptisées *supersingulières* (une classification analogue existe en caractéristique 0, et la terminologie pour ces dernières est *supercuspidales*), sont par définition les représentations qui ne sont pas isomorphes à des sous-quotients d'induites comme ci-dessus. Les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ peuvent être complètement décrites en terme de générateurs et relations. Plus précisément, on a la description très simple suivante : elles sont toutes de la forme $\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma/(T)$ où σ est une représentation irréductible de dimension finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, $\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$ est une induite à support compact (modulo le centre $\mathbb{Q}_p^\times$), et T un endomorphisme canonique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de $\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$.

En utilisant cette classification, et après certains cas particuliers obtenus par le premier auteur ([**Bre03**], [**Bre10**]), les travaux de Colmez ([**Col10**]) et d'Emerton ([**Eme**]) ont abouti à l'analogue du Théorème 1.2.2 :

Théorème 1.3.1. — *Soit f une forme modulaire parabolique de poids* 2*, de niveau (premier à p) U^p, vecteur propre pour les opérateurs de Hecke et telle que $\overline{\rho}(f)$ est irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On a un isomorphisme* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant*

$$\overline{}_p(f)^{\oplus d_{U^p}(f)} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\ \ \overline{\rho}(f), \varinjlim_{U_p} H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_p)\Big)$$

où $\overline{\ }_p(f)$ *est une représentation lisse admissible de longueur finie de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_p$ *qui ne dépend que de* $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$.

Contrairement au cas modulo $\ell \neq p$ où presque toutes les représentations $\overline{\ }_p(f)$ sont irréductibles, les représentations $\overline{\ }_p(f)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ sont réductibles si et seulement si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ l'est (et sont alors le plus souvent de longueur 2), et sont même semi-simples si et seulement si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ l'est. De plus, $\overline{\ }_p(f)$ est supersingulière (irréductible) si et seulement si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est irréductible. Les méthodes de preuve du Théorème 1.3.1 n'ont essentiellement plus rien à voir avec celles de la théorie modulo $\ell \neq p$, en particulier elles utilisent de manière cruciale la théorie de Hodge p-adique des représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ([**Col10**]). Notons par ailleurs que si l'on s'intéresse à toute la représentation $\varinjlim H^1(Y_{U^pU_p}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}_p})$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, elle est encore moins semi-simple pour $\ell = p$ que pour $\ell \neq p$! On peut néanmoins en donner une description complète, c'est-à-dire déterminer toutes les extensions qu'elle contient, en utilisant le Théorème 1.3.1 combiné avec la théorie des déformations de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ([**Eme**]).

2. Représentations de $\mathrm{GL}_2(K)$

À ce stade, il est naturel de se demander ce qu'il advient des résultats précédents pour d'autres groupes que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, disons $\mathrm{GL}_n(K)$ lorsque K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous nous contentons ici de $\mathrm{GL}_2(K)$.

2.1. Représentations en caractéristique 0 **ou** $\ell \neq p$ **de** $\mathrm{GL}_2(K)$**.** — Il faut d'abord modifier le cadre géométrique en utilisant d'autres courbes que les courbes modulaires. Ces courbes s'appellent *courbes de Shimura*. On peut définir leurs points complexes comme suit. On fixe F une extension finie totalement réelle de $\mathbb{Q}$, i.e. F est un corps de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ tel que tout plongement $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ tombe en fait dans $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. On fixe ensuite une algèbre de quaternions D sur F telle qu'il existe un seul plongement $\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $D_\tau \overset{\text{déf}}{=} D \otimes_{F,\tau} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour les autres plongements $F \hookrightarrow \mathbb{R}$ l'algèbre $D \otimes_F \mathbb{R}$ est une algèbre à division, isomorphe à l'algèbre des quaternions de Hamilton. On exclut le cas $F = \mathbb{Q}$ et $D = \mathrm{GL}_2$ traité au § 1. On pose $D_f^\times \overset{\text{déf}}{=} (D \otimes_{\mathbb{Q}} \ _f)^\times$ (éléments inversibles), qui est l'analogue ici de $\mathrm{GL}_2(\ _f)$. Pour chaque sous-groupe ouvert compact $U \subseteq D_f^\times$, il existe alors comme au § 1 une unique courbe algébrique lisse X_U sur F dont les points complexes (via $F \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$) s'identifient à :

$$X_U(\mathbb{C}) = D^\times \backslash \ \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \times (D_f^\times/U)\Big)$$

où l'action de $D^\times$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ se fait via $D^\times \hookrightarrow D_\tau^\times \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (notons que l'hypothèse « F totalement réel » est utilisée de manière cruciale, car un corps de nombres F quelconque donnerait des espaces localement symétriques qui ne sont pas des variétés algébriques en général). Les composantes connexes de la courbe complexe $X_U(\mathbb{C})$ sont encore isomorphes à des quotients du demi-plan de Poincaré par des sous-groupes discrets $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (mais qui ne sont plus des sous-groupes de congruence). De plus, comme $F \neq \mathbb{Q}$, il se trouve que cette courbe est même projective et non plus affine (c'est une des très rares simplifications quand on passe de $\mathbb{Q}$ à $F \neq \mathbb{Q}$!), ce qui revient à dire que les composantes connexes $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ de ces courbes complexes sont des surfaces de Riemann compactes.

Comme au § 1.1, pour $g \in D_f^\times$ et pour des sous-groupes ouverts compacts $U, V \subseteq D_f^\times$ tels que $g\ {}^1Vg \subseteq U$, le morphisme sur les points complexes $X_V(\mathbb{C}) \to X_U(\mathbb{C})$ défini par la multiplication à droite par g provient d'un morphisme de courbes algébriques $X_V \to X_U$ défini sur F, et tous ces morphismes induisent des applications $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$-équivariantes pour tout nombre premier ℓ :

$$H^1(X_U(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell) \to H^1(X_V(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell) \ \text{ et } \ H^1(X_U(\mathbb{C}), \mathbb{F}_\ell) \to H^1(X_V(\mathbb{C}), \mathbb{F}_\ell).$$

On a par ailleurs $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \prod_v F_v$ où les F_v sont des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$: ce sont les divers complétés p-adiques de F (il y en a plusieurs en général). On fixe désormais v tel que $(D \otimes_F F_v)^\times \cong \mathrm{GL}_2(F_v)$ et on note $K \overset{\text{déf}}{=} F_v$ et $\ {}_f^v \overset{\text{déf}}{=} (F \otimes_{\mathbb{Q}} \ {}_f^p) \times (\prod_{w \neq v} F_w)$ (les adèles finis de F hors v). Pour U^v un sous-groupe ouvert compact fixé de $(D \otimes_F \ {}_f^v)^\times$ on a comme en (1) et (3) des représentations $\mathbb{Z}_\ell$-linéaires et $\mathbb{F}_\ell$-linéaires de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times \mathrm{GL}_2(K)$:

$$\varinjlim_{U_v} H^1(X_{U^vU_v}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_\ell) \ \text{ et } \ \varinjlim_{U_v} H^1(X_{U^vU_v}(\mathbb{C}), \mathbb{F}_\ell).$$

Le Théorème 1.2.1 et le Corollaire 1.2.2 restent alors valables en remplaçant les formes modulaires usuelles par les formes modulaires *de Hilbert* paraboliques nouvelles f de poids $(2, \cdots, 2)$, de niveau (premier à v) U^v et vecteurs propres pour les opérateurs de Hecke, auxquelles on peut associer comme au § 1.2 des représentations irréductibles $\rho(f) : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. De même, pour $\ell \neq p$ et $\rho(f)$ irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de réduction $\overline{\rho}(f)$, on a comme en (4) une représentation $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(K)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ l}(\overline{F}/F)}\ \ \overline{\rho}(f), \varinjlim_{U_v} H^1(X_{U^vU_v}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_\ell)\Big)$$

qui est encore isomorphe à $d_{U^v}(f)$ copies d'une représentation (lisse admissible) de longueur finie $\overline{}_v(f)$ de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ qui ne dépend que de $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ l}(\overline{F}_v/F_v)}$ et qui est dans la plupart des cas irréductible. En fait, les preuves de ces résultats en caractéristique 0 ou $\ell \neq p$ sont essentiellement les mêmes pour $K = \mathbb{Q}_p$ ou $K \neq \mathbb{Q}_p$.

Malheureusement, et à la surprise constante des spécialistes depuis deux décennies, il en est tout autre de la théorie en caractéristique $\ell = p$.

2.2. Représentations en caractéristique p de $\mathrm{GL}_2(K)$. — Rappelons que l'on cherche à comprendre la représentation de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$\overline{}(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ l}(\overline{F}/F)}\ \ \overline{\rho}(f), \varinjlim_{U_v} H^1(X_{U^vU_v}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_p)\Big) \tag{5}$$

pour f forme modulaire de Hilbert parabolique de poids $(2, \cdots, 2)$, de niveau (premier à v) U^v, vecteur propre pour les opérateurs de Hecke et telle que $\overline{\rho}(f)$ est irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$.

La raison principale qui empêche d'étendre les preuves du cas $K = \mathbb{Q}_p$ au cas $K \neq \mathbb{Q}_p$ (comme c'est le cas pour $\ell \neq p$) tient en un mot : *supersingulières.* Dès que $K \neq \mathbb{Q}_p$, les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(K)$, i.e. les représentations irréductibles admissibles de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui ne sont pas sous-quotients de séries principales, semblent impossible à décrire, encore moins à classifier. Pour σ une représentation irréductible de dimension finie de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)K^\times$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ les représentations $\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}\ \ )K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)} \sigma/(T)$ existent encore, mais elles ne sont pas admissibles (ni de longueur finie). De plus Schraen et Wu ([**Sch15**], [**Wu21**]) ont montré que toute représentation supersingulière de $\mathrm{GL}_2(K)$ est quotient d'une représentation $\text{c-Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}\ \ )K^\times}^{\mathrm{GL}_2(K)} \sigma/(T)$ par un nombre *infini* de relations dès que $K \neq \mathbb{Q}_p$. Et il semble à ce jour impossible d'expliciter cette infinité de relations.

Cela ne serait pas si grave si ces supersingulières restaient « assez rares ». Mais par un autre coup du sort, d'une part les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(K)$ sont pléthoriques dès que $K \neq \mathbb{Q}_p$ (au moins si le corps résiduel de K n'est pas $\mathbb{F}_p$, cf. [**BP12**]), d'autre part on s'attend à ce qu'elles apparaissent *dans tous les cas* en sous-quotient de la représentation $^{-}(f)$ en (5) dès que $K \neq \mathbb{Q}_p$ (lorsque $K = \mathbb{Q}_p$, elles n'y apparaissent que si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ est irréductible).

Les progrès sur la représentation $^{-}(f)$ entre 2005 et 2020 ont alors essentiellement consisté à comprendre certains de ses sous-espaces *de dimension finie.* Par exemple une information importante est que l'on connaît (à multiplicité près) toutes les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ qui arrivent en *sous-objet* de la représentation (5) (il n'y en a qu'un nombre fini, cf. [**BDJ10**], [**GLS15**]).

Le résultat suivant, bien que (pour l'instant) partiel, représente la première percée sur la compréhension de la représentation (5) depuis plus de 15 ans :

Théorème 2.2.1 **([BHH⁺23], [BHH⁺]).** — *Dans la décomposition $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p = \prod_w F_w$ supposons les extensions F_w de $\mathbb{Q}_p$ toutes non ramifiées et telles que $(D \otimes_F F_w)^\times \cong \mathrm{GL}_2(F_w)$. Soit f une forme parabolique de Hilbert de poids $(2, \cdots, 2)$, de niveau premier à v U^p, vecteur propre pour les opérateurs de Hecke, telle que $\overline{\rho}(f)$ est irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ est suffisamment générique. Prenons enfin U^v suffisamment gros dans $(D \otimes_F \ {}^{v}_{f})^\times$ pour que $d_{U^v}(f) = 1$. lors la représentation $^{-}(f) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G\ 1}(\overline{F}/F)}\ \overline{\rho}(f), \varinjlim H^1(X_{U^vU_v}(\mathbb{C}), \overline{\mathbb{F}}_p)\big)$ de $\mathrm{GL}_2(K)$ est réductible si et seulement si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ l'est. En particulier elle est irréductible si $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ est irréductible.*

La percée est le résultat d'*irréductibilité* de $^{-}(f)$ lorsque $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ est irréductible. La même méthode de preuve devrait permettre (travail en cours des mêmes auteurs) de montrer que la représentation $^{-}(f)$ est toujours *de longueur finie* (en fait $\leqslant 1 + \dim_{\mathbb{Q}_p} K$) pour $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ suffisamment générique, ce qui est d'ailleurs déjà connu lorsque $\dim_{\mathbb{Q}_p} K = 2$ ([**HW22**], [**BHH⁺23**]). Par contre l'hypothèse $K = F_v$ non ramifiée est importante et très présente dans les arguments. De plus on ignore si $^{-}(f)$, même de longueur finie, ne dépend que de $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$. Cette dernière assertion semble la plus difficile, et à ce jour aucun exemple n'est connu pour $K \neq \mathbb{Q}_p$.

2.3. Quelques mots sur la preuve. — La preuve du Théorème 2.2.1 est très différente du cas $K = \mathbb{Q}_p$ (Théorème 1.3.1) puisque d'une part on ne dispose plus d'une classification des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(K)$ si $K \neq \mathbb{Q}_p$, d'autre part beaucoup des arguments de théorie de Hodge p-adique de [**Col10**] ne s'étendent pas lorsque $K \neq \mathbb{Q}_p$. En particulier elle est de nature plus *globale*. Un des points clés est d'analyser l'action sur le dual $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(^{-}(f), \overline{\mathbb{F}}_p)$ du pro-p-sous-groupe I_1 de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ des matrices unipotentes modulo p, c'est-à-dire de la forme $I_1 = \left.\begin{matrix} 1+p\mathcal{O} & \mathcal{O} \\ p\mathcal{O} & 1+p\mathcal{O} \end{matrix}\right)$.

Si est une représentation lisse admissible de I_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors son dual $^{\vee} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\ , \overline{\mathbb{F}}_p)$ est naturellement un module (à gauche) sur l'*algèbre de groupe complétée* (appelée très souvent *algèbre d'Iwasawa*)

$$\overline{\mathbb{F}}_p[\![I_1]\!] \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{U} \overline{\mathbb{F}}_p[\![I_1/U_1]\!]$$

où la limite projective est prise sur les sous-groupes ouverts distingués U_1 de I_1. Notons que $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$ est une algèbre locale (non commutative). On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$, qui n'est autre que l'idéal d'augmentation $\mathrm{Ker}(\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!] \quad \overline{\mathbb{F}}_p)$ où $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1/Z_1]\!] \quad \overline{\mathbb{F}}_p$ envoie tous les éléments de I_1 sur 1.

Idéalement, on aimerait comprendre la structure de module de $^{-}(f)^{\vee}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$. Mais cela semble encore hors de portée si $K \neq \mathbb{Q}_p$. Une question moins difficile, et qui nous suffira, est de comprendre ce qui se passe pour les *gradués*. En effet, l'anneau gradué $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!] \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ agit naturellement sur $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,^{-}(f)^{\vee} \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^{n\,-}(f)^{\vee}/\mathfrak{m}^{n+1\,-}(f)^{\vee}$.

L'algèbre $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$ n'est pas commutative, mais l'étape cruciale dans la preuve du Théorème 2.2.1 est le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 **([BHH+23], [Wan23])**. — *Gardons les hypothèses du Théorème 2.2.1. L'action de* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$ *sur* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,^{-}(f)^{\vee}$ *se factorise par un quotient commutatif explicite de* $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$ *qui est isomorphe à la* $\overline{\mathbb{F}}_p$*-algèbre*

$$\overline{\mathbb{F}}_p[e_1, f_1, \ldots, e_r, f_r]/(e_1 f_1, \ldots, e_r f_r) \tag{6}$$

où $r = \dim_{\mathbb{Q}_p} K$ *est le degré de* K *sur* $\mathbb{Q}_p$.

Il convient ici de faire une analogie avec la théorie des $\mathcal{D}$-modules sur une variété lisse complexe X. Comme pour l'anneau des opérateurs différentiels sur X, l'anneau $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$ est uslander régulier. L'anneau des opérateurs différentiels possède une filtration dont le gradué est l'anneau des fonctions sur l'espace cotangent de X. Dans notre situation, la filtration est la filtration $\mathfrak{m}$-adique et le gradué est isomorphe à l'algèbre enveloppante d'une certaine $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Lie. Le théorème 2.3.1 peut alors se réinterpréter, par analogie avec les $\mathcal{D}$-modules, comme un énoncé sur le « cycle caractéristique » du $\overline{\mathbb{F}}_p\ I_1]\!]$-module $^{-}(f)^{\vee}$, cycle caractéristique que l'on peut voir comme le cycle algébrique associé au support de $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,^{-}(f)^{\vee}$ dans le spectre de l'anneau (commutatif) (6).

La preuve du Théorème 2.3.1 est longue et technique, en particulier elle utilise les généralisations les plus récentes de la méthode de Taylor-Wiles (qui fut l'ingrédient clé dans la preuve du dernier Théorème de Fermat il y a 30 ans) ainsi que des calculs très subtils sur les anneaux de déformations de représentations galoisiennes. De plus, une fois le Théorème 2.3.1 en main, le travail n'est pas terminé pour autant car, pour en déduire le Théorème 2.2.1, il faut encore pas mal d'algèbre commutative ainsi que d'autres calculs (différents des précédents). L'article [**BHH**$^{+}$**23**] démontre le Théorème 2.3.1 lorsque $\overline{\rho}(f)|_{\mathrm{G\ 1}(\overline{K}/K)}$ est semi-simple, mais les preuves s'étendent sans vraie difficulté au cas général ([**Wan23**]). Notons que l'hypothèse $d_{U^v}(f) = 1$ (cf. Théorème 2.2.1) n'est en fait pas nécessaire ici.

Le Théorème 2.3.1 a une autre conséquence, plus directe elle, sur la représentation $^{-}(f)$, et avec laquelle on termine ce survol.

Pour $n \geqslant 1$ définissons $K_n \overset{\text{déf}}{=} 1 + p^n M_2(\mathcal{O}_K) \subseteq I_1$ (les K_n s'appellent les *sous-groupes de congruence* de $\mathrm{GL}_2(K)$). Pour   une représentation lisse admissible de I_1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on peut montrer ([**EP20**]) qu'il y a un unique entier positif ou nul $\dim(\ \ )$ tel qu'il existe des nombres réels $0 < a \leqslant b$ vérifiant pour tout $n \geqslant 1$:

$$a \leqslant \frac{\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\ \ ^{K_n})}{p^{n \dim(\ \ )}} \leqslant b.$$

L'entier $\dim(\ \ )$ s'appelle la *dimension de Gelfand-Kirillov* de . On voit sur sa définition qu'il mesure *grosso-modo* la façon dont la dimension de $\ \ ^{K_n}$ sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ grandit avec n. Par exemple on a $\dim(\ \ ) = 0$ si et seulement si   est un $\overline{\mathbb{F}}_p$ espace vectoriel de dimension finie.

On montre facilement que la représentation $^{-}_{p}(f)$ du Théorème 1.3.1 a pour dimension de Gelfand-Kirillov 1. Pendant longtemps, une conjecture « folklore » était que la dimension de Gelfand-Kirillov de la représentation $^{-}(f)$ en (5) valait $\dim_{\mathbb{Q}_p} K$.

Rappelons que l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\,\overline{\mathbb{F}}_p\ \ I_1]\!]$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante $U(\ \ )$ d'une certaine $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Lie . Notons J l'idéal bilatère de $U(\ \ )$ donnant lieu au quotient mentionné dans le Théorème 2.3.1. Par des considérations générales d'algèbre (commutative et non commutative), on peut montrer, en utilisant le Théorème 2.3.1, que $\dim(^{-}(f))$ est bornée par la dimension de Krull de l'algèbre $U(\ \ )/J$.

Le Théorème 2.3.1 a donc comme conséquence l'inégalité

$$\begin{aligned}\dim(^{-}(f)) \leqslant \dim\ \ &\overline{\mathbb{F}}_p[e_1, f_1, \ldots, e_r, f_r]/(e_1 f_1, \ldots, e_r f_r)\Big)\\ &= 2\dim_{\mathbb{Q}_p} K \quad \dim_{\mathbb{Q}_p} K = \dim_{\mathbb{Q}_p} K.\end{aligned}$$

Or des résultats précédents de Gee–Newton ([**GN22**]) utilisant d'autres types d'arguments avaient établi l'inégalité dans l'autre sens $\dim(^{-}(f)) \geqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} K$. On voit donc qu'une conséquence du Théorème 2.3.1 est :

Coroll ire 2.3.2. — *vec les hypothèses du Théorème 2.2.1, on a* $\dim(^{-}(f)) = \dim_{\mathbb{Q}_p} K$.

Références

[BDJ10] Kevin Buzzard, Fred Diamond, and Frazer Jarvis, On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields, Duke Math. J. **155** (2010), no. 1, 105–161. MR 2730374

[BHH+] Christophe Breuil, Florian Herzig, Yongquan Hu, Stefano Morra, and Benjamin Schraen, Conjectures and results on modular representations of $\mathrm{GL}_n(k)$ for a p-adic field k, `https://rxiv.org/pdf/2102.06188.pdf`, preprint (2021).

[BHH+23] ———, Gelfand–Kirillov dimension and mod p cohomology for $\mathrm{GL}_2(F)$, Invent. Math. **234** (2023), 1–128.

[BP12] Christophe Breuil and Vytautas Paškūnas, Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2, Mem. mer. Math. Soc. **216** (2012), no. 1016, vi+114. MR 2931521

[Bre03] Christophe Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), no. 1, 23–58. MR 1955206 (2005d :11079)

[Bre10] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, stérisque (2010), no. 331, 65–115. MR 2642406 (2012i :11053)

[Col10] Pierre Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $(\ ,\Gamma)$-modules, stérisque (2010), no. 330, 281–509. MR 2642409 (2011j :11224)

[Eme] Matthew Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands program for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, `http://www.m th.uchic go.edu/~emerton/pdffiles/lg.pdf`, preprint (2011).

[EP20] Matthew Emerton and Vytautas Paškūnas, On the density of supercuspidal points of fixed regular weight in local deformation rings and global Hecke algebras, J. Éc. polytech. Math. **7** (2020), 337–371. MR 4077579

[GLS15] Toby Gee, Tong Liu, and David Savitt, The weight part of Serre's conjecture for GL(2), Forum of Mathematics, Pi **3** (2015), e2.

[GN22] Toby Gee and James Newton, Patching and the completed homology of locally symmetric spaces, J. Inst. Math. Jussieu **21** (2022), no. 2, 395–458. MR 4386819

[HW22] Yongquan Hu and Haoran Wang, On the mod p cohomology for GL_2 : the non-semisimple case, Cambridge J. Math. **10** (2022), no. 2, 261–431. MR 4461834

[Sch15] Benjamin Schraen, Sur la présentation des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(F)$, J. Reine ngew. Math. **704** (2015), 187–208. MR 3365778

[Wan23] Yitong Wang, On the mod p cohomology for GL_2, Journal of lgebra **636** (2023), 20–41.

[Wu21] Zhixiang Wu, note on presentations of supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, Manuscripta Math. **165** (2021), 583–596.

Christophe Breuil, CNRS, Université Paris–Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France • *E-m il :* `christophe.breuil@universite-p ris-s cl y.fr`

Stef no Morr , Université Paris VIII, Laboratoire d' nalyse, Géométrie et pplications, Université Sorbonne Paris Nord, 93430, Villetaneuse, France • *E-m il :* `morr @m th.univ-p ris13.fr`

Benj min Schr en, Université Claude-Bernard-Lyon-I, Institut Camille Jordan, 69622, Villeurbanne, France • *E-m il :* `schr en@m th.univ-lyon1.fr`